P_1

$$f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

Notamos que f es par por lo que su serie de Fourier es:

$$S_f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

Donde los coefs cumplen:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \qquad n \in \{0,1,2,\dots\}$$

$\boxed{n=0}$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\pi}$$

$$= \boxed{\frac{\pi^2}{3}}$$

$\boxed{n\neq 0}$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\underbrace{\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx}_{\text{IPP (int. por partes)}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x^2 \implies du = 2x\,dx \\ dv &= \cos(nx)\,dx \implies v = \frac{1}{n}\sin(nx) \end{aligned}}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\cancel{\left.\frac{x^2}{n}\sin(nx)\right|_0^{\pi}}^{\,0} - \frac{2}{n}\underbrace{\int_0^{\pi} x\sin(nx)}_{\text{IPP de nuevo}}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= x \implies du = dx \\ dv &= \sin(nx) \implies v = -\frac{1}{n}\cos(nx) \end{aligned}}$$

$$\implies a_n = \frac{2}{\pi}\left(\left.\frac{2x}{n^2}\cos(nx)\right|_0^{\pi} + \frac{2}{n}\cdot\left(\frac{-1}{n}\right)\int_0^{\pi}\cos(nx)\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{2\pi}{n^2}\underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} - \frac{2}{n^2}\frac{1}{n}\cancel{\sin(n\pi)}^{\,0}\Big|_0^{\pi}\right)$$

$$= \frac{2}{\cancel{\pi}} \cdot \frac{2\cancel{\pi}}{n^2}(-1)^n = \boxed{\frac{4}{n^2}(-1)^n}$$

Por lo que la serie es:

$$\boxed{S_f = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nx)}$$

Y dado que x^2 es continua y L^2 se tiene que:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nx) \quad *$$

b) Evaluando para $x=\pi$ $*$:

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}\underbrace{(-1)^n \overbrace{\cos(n\pi)}^{(-1)^n}}_{1}$$

$$\Rightarrow 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2 - \frac{\pi^2}{3}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\cancel{4}\,2} \cdot \frac{\cancel{2}\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{6}}$$

P_2

$$f(x) = \cos(x) \quad x \in [0,\pi]$$

Pdq $\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} \frac{n}{4n^2-1} \sin(2nx)$

Primero notamos que la expansión que se realiza es una serie en senos, las cuales se dan para expansiones de funciones impares. Por lo tanto extendemos $f(x)$ tq sea impar en $x \in [-\pi,\pi]$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [0,\pi] \\ -f(-x) & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{\tilde{f}} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

donde los coefs b_n se calculan como

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

$$\sin(nx-x) = \cos(x)\sin(nx) - \cos(x)\sin(nx)$$

$$(+)\ \sin(nx+x) = \cos(x)\sin(nx) + \cos(x)\sin(nx)$$

$$\Rightarrow \sin(nx-x) - \sin(nx+x) = 2\cos(x)\sin(nx)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x)\sin(nx)dx$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\pi}\frac{1}{\cancel{2}}\int_0^{\pi}\left[\sin(nx-x) + \sin(nx+x)\right]dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\sin(x(n-1))dx + \int_0^{\pi}\sin(x(n+1))dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n-1}\left(\cancel{\cos(0)}^{1} \underbrace{- \cos(\pi(n-1))}_{(-1)(-1)^{n-1} = (-1)^n}\right) + \frac{1}{n+1}\left(\cancel{\cos(0)}^{1} \underbrace{- \cos(\pi(n+1))}_{(-1)(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2} = (-1)^n(-1)^2 = (-1)^n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1+(-1)^n}{n-1} + \frac{1+(-1)^n}{n+1}\right]$$

$$= \frac{1+(-1)^n}{\pi}\left[\underbrace{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}}_{\frac{2n}{n^2-1}}\right]$$

$$1+(-1)^n = \begin{cases} 2 & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar}\end{cases}$$

Sea $n' = 2n$, n par

$$\Rightarrow b_{2n=n'} = \frac{2\cdot 2(2n)}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}$$

$$\boxed{= \frac{8}{\pi}\frac{n}{4n^2-1}}$$

Por tanto la serie queda:

$$\boxed{f(x) = S_{\hat{f}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi}\frac{n}{4n^2-1}\sin(2nx)}$$

P3

a) La EDP a resolver es:

$$\begin{aligned} &\text{EDC} && \nabla^2 V = 0 \\ &\text{C.B (1)} && V(x,0) = V(x,a) = 0 \\ &\text{C.B (2)} && V(0,y) = V_0(y) \\ &\text{C.B (3)} && V(x\to\infty, y) = 0 \end{aligned}$$

Utilizando separación de variables en EDC $V(x,y) = X(x)Y(y)$:

$$(\partial_{xx} + \partial_{yy})X(x)Y(y) = 0$$

$$Y(y)X''(x) + X(x)Y''(y) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0$$

Lo que sólo es posible si $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = cte$. La elección de la naturaleza de esta cte ($\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-, \mathbb{C}$, etc) dependerá de las C.B y que tenga sentido físico la solución. Sea $cte = k$:

$$-\frac{Y''}{Y} = k \Rightarrow \underbrace{Y'' + kY = 0}_{\text{polinomio característico}}$$

EDO 2do orden

$$\lambda^2 + k = 0$$

$$\lambda^2 = -k \Rightarrow \lambda_1 = \sqrt{-k} \wedge \lambda_2 = -\sqrt{-k}$$

Por lo que la solución es:

$$Y(y) = A e^{\sqrt{-k}\,y} + B e^{-\sqrt{-k}\,y}$$

No obstante no hemos dicho nada sobre la naturaleza de k ya que bien podría ser negativa y la sol cambia a ser oscilatoria. Para elegir un signo para k (y comportamiento de la solución) vemos C.B:

$$Y(0) = 0 = A + B \Rightarrow A = -B$$

$$Y(a) = 0 = Ae^{\sqrt{-k}a} + Be^{-\sqrt{-k}a}$$

$$= A\left(e^{\sqrt{-k}a} - e^{-\sqrt{-k}a}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{A = 0}_{\text{lleva a } Y(y)=0 \text{ sol trivial, se descarta}} \vee \underbrace{e^{\sqrt{-k}a} - e^{-\sqrt{-k}a} = 0}_{\text{solo posible para } k>0 \text{ tq}}$$

$$e^{i\sqrt{k}a} - e^{-i\sqrt{k}a} = 0$$

$$\frac{1}{2i}$$

$$\sin(\sqrt{k}a) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{k}a = n\pi$$

$$k = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \; n \in \mathbb{N}$$

Como $k > 0$, $Y(y)$ en los reales se escribe como:

$$Y(y) = A\cos(\sqrt{k}y) + B\sin(\sqrt{k}y)$$

$$\xRightarrow{CB} Y(0) = A\cos(0) + \cancel{B\sin(0)}^{0} = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$Y(a) = B\sin(\sqrt{k}a) = 0 \Rightarrow \text{se recupera } k = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

Sigue la sol Y es:

$$\boxed{Y(y) = B\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}$$

Ahora la EDO para X:

$$\frac{X''}{X}=k \Rightarrow X''-kX=0$$
$$\Rightarrow X(x)=Ce^{\sqrt{k}x}+De^{-\sqrt{k}x}$$

Imponiendo C.B:

$$X(x\to\infty)=\underbrace{Ce^{\infty}}_{\text{diverge}}+D\cancel{e^{-\infty}}^{\to 0}=0$$

$$\Rightarrow C\equiv 0$$

Y la sol para X queda:

$$X(x)=De^{-\sqrt{k}x}=\boxed{De^{-\overset{\text{de antes}}{\frac{n\pi}{a}}x}}$$

Juntando $V(x,y)=X(x)Y(y)$:

$$\boxed{V(x,y)=Ae^{-\frac{n\pi}{a}x}\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)} \quad n\in\mathbb{N}$$

Por ppio de superposición:

$$\boxed{V(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\frac{n\pi}{a}x}\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}$$

b) Nos falta una C.B por aplicar:

$$V(0,y)=V_0(y)\equiv V_0$$

$$\Rightarrow \underbrace{V_0=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}_{\text{Serie de senos de } V_0}$$

Por tanto los coefs A_n se calculan como:

$$A_n=\frac{2}{a}\int_0^a V_0\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)dy$$
$$=\frac{2V_0}{a}\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)dy$$
$$=\frac{2V_0}{\cancel{a}}\left(-\frac{\cancel{a}}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\right)\Big|_0^a$$

$$= \frac{2V_0}{n\pi}\left(\cos(0) - \underbrace{\cos\left(\frac{n\pi}{\cancel{a}}\cancel{a}\right)}_{(-1)^n}\right)$$

$$= \frac{2V_0}{n\pi}\left(1-(-1)^n\right)$$

$$\Rightarrow A_n = \begin{cases} \frac{4V_0}{n\pi} & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$$

Sigue que la sol general se escribe como:

$$\boxed{V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n\,\text{impar}}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{n\pi}{a}x} \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)}$$

c) Utilizando indicación

$$\sum_{n\,\text{impar}}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{n\pi}{a}x}\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) = \arctan\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}y\right)}{\sinh\left(\frac{\pi}{a}x\right)}\right)$$

Por lo que el potencial se escribe como:

$$\boxed{V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi}\arctan\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{a}y\right)}{\sinh\left(\frac{\pi}{a}x\right)}\right)}$$