PAUTA AUXILIAR #15.

P1 En general, para escribir una función real a forma cuadrática ($x^T A x$), se deben seguir los siguientes pasos:

1.- Desarrollar la expresión hasta llegar a una forma de tipo

$$f(x) = \sum_{i \neq j \leq n} a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \cdot x_i^2$$

(es decir, una expresión polinomial de grado 2 de "n" variables).

2.- Teniendo esto la matriz A que determina la forma cuadrática tendrá la siguiente forma:

$$(A)_{ij} = \begin{cases} a_{ii} & \text{si } i = j \\ \dfrac{a_{ij}}{2} \left(= \dfrac{a_{ji}}{2} \right) & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

notar que esto es consistente con que A debe ser simétrica.

Por otro lado, es importante recordar que las siguientes nociones son equivalentes:

1) A es una matriz definida positiva.
2) A tiene sus valores propios estrictamente positivos.
3) $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$x^T A x > 0$$

Con esto:

a) $-2x_1^2 - \frac{1}{2}x_1x_2 + 5x_2^2$

Vemos que esta expresión ya tiene forma explícita de polinomio:

Con esto: $a_{11} = -2$ $a_{22} = 5$ $a_{12} = \frac{-1}{2} = a_{21}$

Así: $A = \begin{pmatrix} -2 & -1/4 \\ -1/4 & 5 \end{pmatrix}$

b) $x_1(2x_1 - x_2) + x_2(3x_1 + x_2)$ Debemos hacer manejo algebraico con la expresión.

$2x_1^2 - x_1x_2 + 3x_1x_2 + x_2^2$

$= 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ Con esto:

$a_{11} = 2$; $a_{22} = 1$; $a_{12} = a_{21} = 2$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3$ Notamos que:

$x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3 = x_1^2 + 0 \cdot x_2^2 + 0 \cdot x_3^2 + 0 \cdot x_2x_3 + x_1x_3 - x_1x_2$

$\Rightarrow a_{11} = 1$; $a_{22} = 0$; $a_{33} = 0$; $a_{12} = a_{21} = -1$

$a_{13} = a_{31} = 1$; $a_{23} = a_{32} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) $(x_1+x_2)^2 - (x_1+x_3)^2$ Desarrollamos la expresión:

$\hookrightarrow = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - x_1^2 - 2x_1x_3 - x_3^2$

$= x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3$

$\Rightarrow a_{11} = 0$; $a_{22} = 1$; $a_{33} = -1$; $a_{12} = a_{21} = 2$

$a_{13} = a_{31} = -2$; $a_{23} = a_{32} = 0$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

P2 a) Comencemos del lado derecho:

$$(x-x_0)^T A (x-x_0) - x_0^T A x_0 + C$$

$$= x^T A x - x_0^T A x - x^T A x_0 + \cancel{x_0^T A x_0} - \cancel{x_0^T A x_0} + C$$

$$= x^T A x - x_0^T A x - x^T A x_0 + C$$

Aplicamos la def. de x_0 ($= \frac{1}{2} A^{-1} b$) (*)

Punto importante: A definida positiva $\Rightarrow$ sus vp's son todos estrictamente positivos

$\Rightarrow$ A es invertible.

Luego x_0 está bien definido.

Aplicando (*):

$$= x^T A x - \frac{1}{2} b^T (A^{-1})^T A x - x^T A \frac{1}{2} A^{-1} b + C$$

y: $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$ donde lo primero se cumple siempre, y lo 2° es por A simétrica.

$$(\cdots) = x^T A x - \frac{1}{2} b^T x - \frac{1}{2} x^T b + C$$

y: $b^T x = \langle b, x \rangle = \langle x, b \rangle = x^T b$. Luego:

$$(\cdots) = x^T A x - b^T x + C$$ con lo que probamos lo pedido

b) En efecto: PDQ $f(x) - f(x_0) \geq 0 \quad \forall x$ Veamos que:

$$f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^T A (x-x_0) - \cancel{x_0^T A x_0} + \cancel{c}$$

$$- \underbrace{\cancel{(x_0 - x_0)^T A (x_0 - x_0)}}_{0} + \cancel{x_0^T A x_0} - \cancel{c}$$

$$= \underbrace{(x-x_0)^T}_{\text{"}v^T\text{"}} A \underbrace{(x-x_0)}_{\text{"}v\text{"}} = v^T A v \geq 0$$ pues A es def. positiva.

Más aún, bajo el mismo argumento, la igualdad se tiene ssi

$v = 0$; esto es, $x = x_0$

Con lo que probamos lo pedido.

P3 a) Recordemos que se recomienda comenzar desde los elementos con más ceros, a los con menos.

- $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Que ya está de norm 1).

- $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $w_2 = u_2 - \langle v_1, u_2 \rangle v_1$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{0} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego $v_2 = \dfrac{w_2}{\|w_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $w_3 = u_3 - \langle v_1, u_3 \rangle v_1 - \langle v_2, u_3 \rangle v_2$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \underbrace{\left\langle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{\frac{3}{\sqrt{3}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{no se puede normalizar.}$$

• $u_4 = \begin{pmatrix}2\\3\\3\\3\end{pmatrix}$; $w_4 = u_4 - \langle u_4, v_1\rangle v_1 - \langle u_4, v_2\rangle v_2 - \langle u_4, v_3\rangle v_3$

$$= \begin{pmatrix}2\\3\\3\\3\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}2\\3\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}2\\3\\3\\3\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$- \cancel{\left\langle \begin{pmatrix}2\\3\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}}^{\,0}$$

$$= \begin{pmatrix}2\\3\\3\\3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\,9\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\rightarrow \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$ es la base buscada.

b) Ocupamos TNI :

$$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(\mathbb{R}^4) - \dim(\mathrm{Ker}(T))$$

$$= 4 - \dim(S) = 4 - 2 = 2$$

Luego, notemos que:

• $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(T)$

• $\left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\}$ es l.i.

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \right\}$ es base de $\mathrm{Im}(T)$.

c) Tenemos base del ker(T), y tenemos que conocemos preimágenes de una base de Im(T).

Con esto la idea es descomponer un vector

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ en una c.l. de $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

En efecto:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (c-b) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (d-b) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \cancelto{0}{aT\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} + \cancelto{0}{bT\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} + (c-b)\,T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (d-b)\,T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (c-b)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (d-b)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d-b \\ b-d \\ c+d-2b \\ b-d \end{pmatrix}$$

Luego: $T(X) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot X$. para la base canónica

d) Recordemos:

1.- Pasar de base arbitraria a base canónica es sencillo, pues basta escribir la base arbitraria como matriz por columna.

2.- El proceso contrario es posible llevarlo a cabo aplicando 1.- e invirtiendo.

Con esto, la matriz M buscada es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$