MA1102-6 Álgebra lineal
Profesor: Martín Matamala
Auxiliar: Juan Pablo Sepúlveda

Auxiliar 14: Más matrices, más simétricas

28 de noviembre de 2022

P1. Que es esto ayuda Escriba en forma x^tAx las siguientes formas cuadráticas:

- $q(x) = -2x_1^2 - \frac{1}{2}x_1x_2 + 5x_2^2$
- $q(x) = x_1(2x_1 - x_2) + x_2(3x_1 + x_2)$
- $q(x) = x_1^2 - x_1x_2 + x_1x_3$
- $q(x) = (x_1 + x_2)^2 - (x_1 + x_3)^2$

.

P2. Optimizamos matrices Sea $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ simétrica definida postiva, $b \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}$. Definimos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^tAx - b^tx + c$ Se quiere minimizar f.

a) Sea $x_0 = \frac{1}{2}A^{-1}b$. Pruebe que $f(x) = (x - x_0)^tA(x - x_0) - x_0^tAx_0 + c$

b) Concluya que el único mínimo de f se alcanza en x_0, i.e., que $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in R^2$ y que la igualdad se alcanza solamente cuando $x = x0$

P3. Back to basics Sea el siguiente espacio vectorial:

$$S = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

a) Encuentre una base de S usando Gram-Schdmit.

Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineal tal que $\ker(T) = S$ que cumple:

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

b) Determine la dimensión de $\text{Im}(T)$ y una base de este espacio.

c) Determine explícitamente T.

d) Sean:

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\} \qquad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\3\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

Encuentre la matriz representante de T para la base B_1 en la salida y B_2 en la llegada.