Pauta Auxiliar #14 Lineal

P1 PDQ: A no invertible $\Leftrightarrow$ $\lambda = 0$ es vp de A.

Ocuparemos sólo equivalencias:

A no invertible $\Leftrightarrow$ $\det(A) = 0$ $\Leftrightarrow$ $\det(A - 0 \cdot I) = 0$

$\Leftrightarrow$ 0 es vp de A.

Con lo que probamos lo pedido.

P2 $E, F \in M_{7\times7}(\mathbb{R})$

- vp's de E: $\{\rho_1, \rho_2\}$
- vp's de F: $\{\delta_1, \delta_2\}$

Multiplicidades geométricas cumplen:
- $\gamma_E(\rho_1) = \gamma_F(\delta_1) = 5$
- $\gamma_E(\rho_2) = \gamma_F(\delta_2) = 2$

a) En efecto, notemos que:

$$\sum_{\substack{\lambda \text{ vp de} \\ E}} \gamma_E(\lambda) = \gamma_E(\rho_1) + \gamma_E(\rho_2) = 7 = n$$

y:

$$\sum_{\substack{\lambda \text{ vp de} \\ F}} \gamma_F(\lambda) = \gamma_F(\delta_1) + \gamma_F(\delta_2) = 7 = n$$

y esto (que la suma de todas las mult. geométricas sea n) es equivalente a ser diagonalizable

$\Rightarrow$ Tanto E como F son diagonalizables //

b) Ahora consideramos

$$\underbrace{V_{\rho_1}^{E}}_{} = V_{\delta_1}^{F} \quad y \quad V_{\rho_2}^{E} = V_{\delta_2}^{F}$$

↳ Espacio propio de E asociado a su $\vec{vp}$ $\lambda = \rho_1$.

Con esto como E y F son diagonalizables.

Sea $\{v_1, \dots, v_5\}$ base de $V_{\rho_1}^{E}$ (y $V_{\delta_1}^{F}$)

y $\{v_6, v_7\}$ base de $V_{\rho_2}^{E}$ (y $V_{\delta_2}^{F}$)

Tenemos:

$$E = \underbrace{(v_1 | \dots | v_7)}_{P^*} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \rho_1 & & & & & & 0 \\ & \rho_1 & & & & & \\ & & \rho_1 & & & & \\ & & & \rho_1 & & & \\ & & & & \rho_1 & & \\ & & & & & \rho_2 & \\ 0 & & & & & & \rho_2 \end{pmatrix}}_{D_E} \cdot \underbrace{(v_1 | \dots | v_7)^{-1}}_{P^{-1\,*}}$$

y a su vez

$$F = \underbrace{(v_1 | \dots | v_7)}_{P^*} \underbrace{\begin{pmatrix} \delta_1 & & & & & & 0 \\ & \delta_1 & & & & & \\ & & \delta_1 & & & & \\ & & & \delta_1 & & & \\ & & & & \delta_1 & & \\ & & & & & \delta_2 & \\ 0 & & & & & & \delta_2 \end{pmatrix}}_{D_F} \underbrace{(v_1 | \dots | v_7)^{-1}}_{P^{-1\,*}}$$

* Es el mismo "P" ⟹ Es el mismo "P^{-1}"

Luego, con esto:

$$E \cdot F = P D_E \cancel{P^{-1} \cdot P}^{I} D_F \cdot P^{-1} = P \cdot D_E \cdot D_F \cdot P^{-1}$$

$$\underset{\downarrow}{=} P D_F \cdot D_E P^{-1} = P D_F \, I \, D_E P^{-1} = P D_F P^{-1} P D_E P^{-1}$$

Las diagonales conmutan entre sí

$$= F \cdot E$$

Con lo que probamos lo pedido ■

P3 $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ simétrica.

$P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$. $u = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$

vp's de A.

a) Para esta pregunta (y el resto del auxiliar) usaremos fuertemente la sgte propiedad CLAVE:

$(\star)$ Sea A matriz simétrica real ; $u, v \in \mathbb{R}^n$ vectores propios de A asociados a valores propios distintos, entonces $\langle u, v\rangle = 0$ es decir, u y v son ortogonales.

Ahora, comencemos con las multiplicidades algebraicas:

como $P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda)^1$

obtenemos: $\alpha_A(1) = 2$
$\alpha_A(3) = 1$

y como A es real simétrica, es diagonalizable. por lo tanto:

$\forall \lambda$ valor propio de A: $\gamma_A(\lambda) = \alpha_A(\lambda)$

donde $\gamma_A(\lambda)$ es la multiplicidad geométrica.

Con ello: $\gamma_A(1) = 2$
$\gamma_A(3) = 1$

b) Ocupemos $(\star)$, veamos si $\langle u, v\rangle = 0$. si no lo es, son del mismo valor propio. En efecto:

$\langle u, v\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = 2\cdot 3 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 = 6+1+2 = 9$

$\Rightarrow$ u, v ambos son vp's de $\lambda = 1$ (pues no podrían ser ambos de $\lambda = 3$ pues $\gamma_A(3) = 1$)

c) Usaremos de nuevo (4). Queremos $w \in \mathbb{R}^3$ tq $\langle w, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = 0$ y $\langle w, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0$.

Si $w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, vemos que

- $\langle w, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = 0 \iff 2a + b + 2c = 0$ (1)

- $\langle w, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0 \iff 3a + b + c = 0$ (2)

Si hacemos (2) − (1):

$a - c = 0 \Rightarrow a = c$ (3)

Luego, si aplico (3) a (1)

$-4a = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ cumple lo pedido.

Confirmemos:

- $\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 1 = 0$

- $\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) + 1 \cdot 1 = 0$

$\Rightarrow$ obtenemos lo pedido.

P4

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Buscamos el $P_A(\lambda)$:

$$P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & -2 \\ -2 & 7-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 6-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (5-\lambda) \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{pmatrix} + (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & (7-\lambda) \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= (5-\lambda) \left[(7-\lambda)(6-\lambda) - 4\right] + (-2)\left[0 + 2(7-\lambda)\right]$$

$$= (5-\lambda)(7-\lambda)(6-\lambda) - 4(5-\lambda) + -2\left[14 - 2\lambda\right]$$

$$= (5-\lambda)(7-\lambda)(6-\lambda) - 4\left[5-\lambda+7-\lambda\right)$$

$$= (5-\lambda)(7-\lambda)(6-\lambda) - 4 \cdot (12 - 2\lambda)$$

$$= (6-\lambda)\left[(5-\lambda)(7-\lambda) - 8\right]$$

$$= (6-\lambda)(\lambda^2 - 12\lambda + 35 - 8)$$

$$= (6-\lambda)(\lambda^2 - 12\lambda + 27) = (6-\lambda)(\lambda-9)(\lambda-3)$$

$\Rightarrow \{3, 6, 9\}$ es el conjunto de vp's de A.

b) Calculemos vectores propios:

$\boxed{\lambda=3}$: Resolvemos: $(A - 3I) \cdot v = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array}$$

de ① $2a - 2c = 0 \Rightarrow a = c \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

de ② $4b - 2c = 0 \Rightarrow c = 2b$

$\boxed{\lambda=6}$ Debemos resolver $(A-6I)v=0$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array}$$

$\Rightarrow$ De ① $\quad 2c=-a$

De ② $\quad b=2c$ $\quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda=9}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array}$$

$\Rightarrow$ De ① : $2a=-c$

De ② $\quad b=-c$ $\Bigg\} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Como (por (*)) todos son ortogonales:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$ es base ortogonal de $\mathbb{R}^3$

Falta normalizar para poder tener P ortonormal

Como $\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = 3$

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = P^{T} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$ Es la descomposición pedida.

c) No, pues sus valores propios son todos no nulos.

(7)

P5 Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica, $v \in \mathbb{R}^n$.

a) PDQ v es $\vec{vp}$ de $A \Leftrightarrow v$ es $\vec{vp}$ de $I-A$.

En efecto, usando sólo equivalencias:

v $\vec{vp}$ de $A \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}: \quad Av = \lambda v \quad / \cdot -1$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\quad -\lambda v = -Av \quad / + v \ (= I \cdot v)$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\quad v - \lambda v = v - Av$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $\quad (1-\lambda) v = (I-A) v$

$\Leftrightarrow v$ es $\vec{vp}$ de $I-A$ con vp asociado $\tilde{\lambda} = 1-\lambda$

Con lo que tenemos todo lo pedido.

b) Ocuparemos que: sea B simétrica real

B es definida positiva ssi todos sus vp's son estrictamente positivos

Con esto y usando sólo equivalencias:

$I-A$ es def. positiva

$\Leftrightarrow \forall \tilde{\lambda}$ vp de $I-A \quad \tilde{\lambda} > 0$

$\Leftrightarrow \forall \lambda$ vp de $A \quad 1-\lambda > 0$

por P5 a)

$\Leftrightarrow \forall \lambda$ vp de $A \quad \lambda < 1$

Con lo que probamos lo pedido ∎