Pauta Auxiliar #13 lineal

P1) a) En efecto, sean $u, v \in \mathbb{C}^n$ arbitrarios:

$$\overline{\langle v, u\rangle_H} := \overline{\sum_{k=1}^{n} v_k \overline{u_k}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{v_k \overline{u_k}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{v_k} \cdot u_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} u_k \overline{v_k} =: \langle u, v\rangle_H \;//$$

b) En efecto, sean $u, v, w \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\langle \lambda u + v, w\rangle_H = \sum_{k=1}^{n} (\lambda u + v)_k \cdot \overline{w_k} = \sum_{k=1}^{n} (\lambda u_k + v_k)\overline{w_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda u_k \overline{w_k} + \sum_{k=1}^{n} v_k \overline{w_k} = \lambda \sum_{k=1}^{n} u_k \overline{w_k} + \sum_{k=1}^{n} v_k \overline{w_k}$$

$$=: \lambda \langle u, w\rangle_H + \langle v, w\rangle_H \;//$$

c) $\langle u, u\rangle_H := \sum_{k=1}^{n} u_k \cdot \overline{u_k} := \sum_{k=1}^{n} |u_k|^2$

y sabemos que $\forall z \in \mathbb{C}: \; |z| \in \mathbb{R}$

$|z| \geq 0$ y $(|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0)$.

Luego, concluimos todo lo pedido

d) En efecto:

$$\langle w, \lambda u + v\rangle_H \underset{(a)}{=} \overline{\langle \lambda u + v, w\rangle_H} \underset{(b)}{=} \overline{(\lambda \langle u, w\rangle_H + \langle v, w\rangle_H)}$$

$$= \overline{\lambda}\; \overline{\langle u, w\rangle_H} + \overline{\langle v, w\rangle_H} \underset{(a)}{=} \overline{\lambda} \langle w, u\rangle_H + \langle w, v\rangle_H \;//$$

P2 a) Corroboremos ortogonalidad: → Para esto, debemos ver que $\forall u, v^{*}$ en el cjto $\langle u, v \rangle = 0$.

* con $u \neq v$

- $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1$

$= -2 + 1 + 1 + 0 = 0$

- $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot (-4) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 6$

$= -4 + 1 + 3 + 0 = 0$

- $\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \right\rangle = (-2) \cdot (-4) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-6)$

$= 8 + 1 + 3 - 12 = 0$

Luego, el cjto es ortogonal

b) Corroboremos ortogonalidad:

- $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = 0 + 8 = 8 \neq 0$

Así, de partida el cjto no es ortogonal → ocupamos G-S:

TIP: Al ocupar G-S, comiencen con los elementos que tengan más ceros.

Comencemos con $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \longmapsto v_1 = \dfrac{w_1}{\| w_1 \|}$

$= \dfrac{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{0^2 + 4^2}} = \dfrac{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}}{4} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ahora $u_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \mapsto w_2 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, v_1 \right\rangle \cdot v_1$

$= \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - (1\cdot 0 + 2\cdot 1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

y como ya tiene norma 1: $v_2 = w_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Finalmente $u_3 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \mapsto w_3 = u_3 - \langle u_3, v_1\rangle \cdot v_1 - \langle u_3, v_2\rangle \cdot v_2$

$= \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - (1\cdot 0 + 0\cdot 1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - (1\cdot 1 + 1\cdot 0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ → como tiene norma 0 no podemos dividir por su norma.

Luego $\left\{ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \right\}$ es el cjto pedido

c) Revisemos ortogonalidad:

- $\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = 1\cdot 0 + 2\cdot 4 + 3\cdot(-1) = 0 + 8 - 3 \neq 0$

⇒ No es ortogonal → usamos G-S

Comenzamos con $w_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ → el con más ceros.

$\|w_1\| = 1$ así que $v_1 = w_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Luego $u_2 = \begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix}$ → El segundo con más ceros.

$w_2 = u_2 - \langle u_2, v_1\rangle v_1 = \begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - (0 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego $v_2 = \dfrac{w_2}{\|w_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{0^2+4^2+0^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Finalmente: $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mapsto w_3 = u_3 - \langle u_3, v_1 \rangle v_1 - \langle u_3, v_2 \rangle v_2$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - (1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$ YA tiene norma 1

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es conjunto obtenido de G-S.

Nota: PARA comprender lo útil de partir con los vectores de más ceros pueden propuesto seguir el sgte orden:

1° $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; 2° $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$; 3° $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lo cual deja: $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{14}}{14} \\ \frac{\sqrt{14}}{7} \\ \frac{3\sqrt{14}}{14} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{2982}}{2982} \\ -\frac{23\sqrt{2982}}{1491} \\ \frac{29\sqrt{2982}}{2982} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -\frac{14\sqrt{213}}{213} \\ \frac{\sqrt{213}}{213} \\ \frac{4\sqrt{213}}{213} \end{pmatrix} \right\}$

¿Por qué Ambos conjuntos son respuestas correctas?

El que responda por correo se gana un chocolate.

P3) $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertible $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ vp's de AA^T

a) PDQ: $\exists$ base de $\mathbb{R}^n$ ortonormal de vectores propios de AA^T.

En efecto, la única manera que disponemos para hacer esto es ver que AA^T es simétrica pues esto implica lo pedido.

y: $(AA^T)^T = (A^T)^T \cdot A^T = A \cdot A^T$ //

Prop: transpuesta de un producto.

Luego probamos lo pedido.

b) En efecto sea λ_k vp de AA^T, v_k su $\vec{vp}$. asociado, tenemos que:

$$AA^T \cdot v_k = \lambda_k \cdot v_k \quad / \; v_k^T \cdot$$

$$\Leftrightarrow v_k^T AA^T v_k = v_k^T \lambda_k v_k$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(A^T v_k)^T \cdot A^T v_k}_{\|A^T v_k\|^2} = \lambda_k \underbrace{v_k^T v_k}_{\|v_k\|^2}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\|A^T v_k\|^2}_{\neq 0} = \lambda_k \underbrace{\|v_k\|^2}_{\neq 0} \Leftrightarrow 0 < \frac{\|A^T v_k\|^2}{\|v_k\|^2} = \lambda_k$$

$\neq 0$ pues A invertible $\Rightarrow A^T$ invertible $\Rightarrow A^T v_k \neq 0$ (pues $v_k \neq 0$).

$\neq 0$ pues los $\vec{vp}$'s no pueden ser 0.

$$\Rightarrow \lambda_k > 0$$

c) Como $\lambda_k > 0$ $\forall k \in \{1,\dots,n\}$ tenemos que $\sqrt{\lambda_k}$ y $\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}$ están bien definidos.

Entonces llamamos $\sigma_k := \sqrt{\lambda_k}$

$$u_k := \frac{1}{\sigma_k} \cdot A^T \cdot v_k$$

Donde $\{v_1,\dots,v_n\}$ es la base ortonormal de vp's de AA^T.

Queremos que los u_k sean base (1) orto (2) normal (3) de vectores propios de A^TA (4) asociados al σ_k^2 respectivo (5)

Probemos (4) y (5) ocupando def:

$$(A^TA) \cdot u_k = A^TA \cdot \frac{1}{\sigma_k} \cdot A^T \cdot v_k$$

$$= \frac{1}{\sigma_k} A^T \cdot \underbrace{(AA^T) \cdot v_k}_{\lambda_k \cdot v_k} = \frac{1}{\sigma_k} A^T \cdot \lambda_k \cdot v_k$$

$$= \lambda_k \cdot \underbrace{\frac{1}{\sigma_k} \cdot A^T \cdot v_k}_{u_k} = \lambda_k u_k = \sigma_k^2 \cdot u_k$$

Con lo que los u_k son los vp's de A^TA asociados al $\lambda_k = \sigma_k^2$ respectivo, i.e., probamos (4) y (5)

Probemos (2), i.e., ortogonalidad. Sea $i \neq j \in \{1,\dots,n\}$

$$\langle u_i, u_j \rangle = \left\langle \frac{1}{\sigma_i} \cdot A^T v_i , \frac{1}{\sigma_j} \cdot A^T \cdot v_j \right\rangle$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma_i} A^T v_i\right)^T \left(\frac{1}{\sigma_j} A^T v_j\right) = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} v_i^T \underbrace{AA^T v_j}_{= \lambda_j v_j}$$

pues v_j es vp de AA^T asociado al vp λ_j

$$= \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} v_i^T \cdot \lambda_j v_j = \frac{\lambda_j}{\sigma_i \sigma_j} \underbrace{v_i^T v_j}_{\langle v_i, v_j \rangle = 0}$$

pues v_i y v_j son ortogonales

Con ello, en resumen: $\langle u_i, u_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$ ①

$\Rightarrow \{u_1, \dots, u_n\}$ es ortogonal

Más aún, podemos probar ② muy similarmente si $i = j$, obtenemos bajo el mismo procedimiento:

$$\langle u_i, u_i \rangle = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i} \cdot \sqrt{\lambda_i}} \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{= \|v_i\|^2 = 1} = \frac{\sqrt{\lambda_i}^2}{\sqrt{\lambda_i}^2} \cdot 1 = 1$$

pues v_i es parte de una base ortonormal.

$\Rightarrow \{u_1, \dots, u_n\}$ es conjunto ortonormal

Finalmente, para ① basta notar que todo conjunto ortonormal es l.i., i.e.:

$\{u_1, \dots, u_n\}$ es un conjunto de $\mathbb{R}^n$ que es l.i. y de tamaño n

$\Rightarrow$ es base de $\mathbb{R}^n$.

Con lo que probamos todo lo pedido ■

P4 Notemos que, buscando valores propios:

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & i \\ i & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(1^2 - \lambda^2) + 1 = \lambda^2$$

$\Rightarrow \lambda = 0$ con multiplicidad algebraica $\alpha(0) = 2$

Pero

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{12}(-i)]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow v_1 = -i \cdot v_2$$

$\Rightarrow \left\{\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ es base del espacio propio de $\lambda = 0$

$\Rightarrow$ la mult. algebraica de $\lambda = 0$ es 1

Luego $\alpha(0) \neq \gamma(0)$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable

mult. Algebraica

mult. geométrica

Esto puede parecer en principio un problema, pues teníamos entendido que

A simétrica $\Rightarrow$ A diagonalizable

PERO este caso sólo aplica a matrices con coeficientes REALES.

Para el caso complejo, el resultado es

A Hermética $\Rightarrow$ A diagonalizable

y en este caso $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ es simétrica

pero No es Hermítica, por lo que todo está en orden.