MA1102-6 Álgebra lineal
Profesor: Martín Matamala
Auxiliar: Juan Pablo Sepúlveda

Auxiliar 13: Matrices simétricas

21 de noviembre de 2022

P1. Cosas útiles Muestre las siguientes propiedades del producto de Hermitte $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\forall u,v\in\mathbb{C}^n, \lambda\in\mathbb{C}$:

a) $\langle u,v\rangle_H = \overline{\langle v,u\rangle}_H$

b) $\langle \lambda u+v,w\rangle_H = \lambda\langle u,w\rangle_H + \langle v,w\rangle_H$

c) $\langle u,u\rangle_H \in \mathbb{R}$. De hecho es no negativo, y es cero ssi $u=0$

d) $\langle w,\lambda u+v\rangle_H = \overline{\lambda}\langle w,u\rangle_H + \langle w,v\rangle_H$

P2. Comprender más. Determine si los siguientes conjuntos son ortogonales. De no serlo, apliqueles el algoritmo de Gram-Schmidt.

a) $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-4\\1\\3\\-6\end{pmatrix}\right\}$

b) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$

c) $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

P3. Malabares transpuestos. Sea $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertible, $\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ los valores propios de AA^T.

a) Muestre que existe una base ortonormal de vectores propios de AA^T.

b) Muestre que todos los $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ son positivos

c) Definimos $\sigma_i=\sqrt{\lambda_i}$, y $u_i=\frac{1}{\sigma_i}A^Tv_i$. Pruebe que los u_i son base ortonormal de vectores propios de A^TA, asociados a los σ_i^2 respectivos.

P4. Ojito al detalle. Determine si $\begin{pmatrix}1 & i\\ i & -1\end{pmatrix}$ es diagonalizable.