Pauta Auxiliar #11 Lineal

P1 a)

$$\begin{pmatrix} -29 & 4 & 18 & 512 & 2 \\ -97 & -2 & 9 & 72 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -14 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 15/7 & 0 & 0 \end{pmatrix} (=: A)$$

* El coef $(1,1)$ parte con un signo "+" asociado, y luego se va alternando para encontrar los de los otros coefs haciendo un "camino".

La idea para este es identificar la buena fila que ocupar para aplicar la definición recursiva del det()

En efecto, vemos que si seguimos la tercera fila, sólo sobrevive el tercer término, así

$$\det(A) = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} -29 & 4 & 512 & 2 \\ -97 & -2 & 72 & 1 \\ 8 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nuevamente, vemos que se puede tomar la cuarta fila y sólo tendremos un término:

OJO Como el 1 tiene asociado un signo −, el coeficiente sale multiplicado por −1, es decir:

$$\det(A) = -1 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 512 & 2 \\ -2 & 72 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, seguimos la tercera fila (hay que multiplicar nuevamente por −1):

$$\det(A) = -1 \cdot -3 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

y este det. de 2×2 lo sabemos calcular

$$\det(A) = 3 \cdot (4 \cdot 1 - 2 \cdot (-2)) = 3 \cdot (4+4) = 24$$

b) $B = \begin{pmatrix} 29 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 41 & 20 & 0 & 1 & 0 \\ 24 & 1000 & 500 & -3 & 1 \\ 25 & 4 & 1 & 69 & 0 \\ 777 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Acá la idea será permutar filas/columnas para llegar a una matriz triangular, ya que sus determinantes son fáciles de calcular.

Ordenaremos primero las filas y luego las columnas.

Cambiamos la 1ª con la 3ª fila:

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 24 & 1000 & 500 & -3 & 1 \\ 41 & 20 & 0 & 1 & 0 \\ 29 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 4 & 1 & 69 & 0 \\ 777 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ triangular superior parte con fila completa.

Luego, cambiamos la 4ª fila con la 2ª, para que la fila que tiene un sólo cero quede 2ª:

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 24 & 1000 & 500 & -3 & 1 \\ 25 & 4 & 1 & 69 & 0 \\ 29 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 41 & 20 & 0 & 1 & 0 \\ 777 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, cambiamos 3ª con 5ª fila

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 24 & 1000 & 500 & -3 & 1 \\ 25 & 4 & 1 & 69 & 0 \\ 777 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 41 & 20 & 0 & 1 & 0 \\ 29 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora cambiando 3ª y 4ª obtenemos:

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 24 & 1000 & 500 & -3 & 1 \\ 25 & 4 & 1 & 69 & 0 \\ 41 & 20 & 0 & 1 & 0 \\ 777 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 29 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to \text{sin 0's} \\ \to \text{un } 0 \\ \to \text{dos 0's} \\ \to \text{tres 0's} \\ \to \text{cuatro 0's} \end{array}$$

Con eso las filas quedan ordenadas, con lo que si ordenamos las columnas estamos listos.

Vemos que podemos, por ejemplo, intercambiar la 1ª y 5ª columna:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1000 & 500 & -3 & 24 \\ 0 & 4 & 1 & 69 & 25 \\ 0 & 20 & 0 & 1 & 41 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 777 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 29 \end{pmatrix}$$

Luego, cambiamos la 2ª con la 3ª columna

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 500 & 1000 & -3 & 24 \\ 0 & 1 & 4 & 69 & 25 \\ 0 & 0 & 20 & 1 & 41 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 777 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 29 \end{pmatrix}$$

Finalmente, cambiamos la 3ª y 4ª columna

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 500 & -3 & 1000 & 24 \\ 0 & 1 & 69 & 4 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 20 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 777 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 29 \end{pmatrix}$$

Que es una matriz triangular superior, y como sabemos, su determinante es la pitatoria de la diagonal.

Además en total tuvimos 7 permutaciones de fila / columna, por lo que

$$\det(B) = (-1)^7 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot -1 \cdot 29) = 29$$

//

P2 Consideremos $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^d$ bilineal y definimos:

$$\tilde{B} : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^d$$
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{*} \longmapsto B(u, v)$$

$*$ Usaremos $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ como notación para un vector de $\mathbb{R}^{n+m}$ donde $u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^m$.

Consideremos $B \neq 0$ probemos que $\tilde{B}$ no puede ser lineal. Por contradicción, si lo fuera:

sean $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$

$$\tilde{B}\begin{pmatrix} u_1+u_2 \\ v_1+v_2 \end{pmatrix} = \tilde{B}\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) \underset{\text{Linealidad}}{=} \tilde{B}\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + \tilde{B}\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} =$$

y por otro lado, como B es bilineal

$$\tilde{B}\begin{pmatrix} u_1+u_2 \\ v_1+v_2 \end{pmatrix} := B(u_1+v_1, u_2+v_2) = B(u_1, v_1+v_2) + B(u_2, v_1+v_2)$$
$$= B(u_1, v_1) + B(u_1, v_2) + B(u_2, v_1) + B(u_2, v_2)$$

Es decir:

$$\tilde{B}\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + \tilde{B}\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = B(u_1, v_1) + B(u_2, v_2) + B(u_1, v_2) + B(u_2, v_1)$$
$$\parallel$$
$$B(u_1, v_1) + B(u_2, v_2)$$

$$\Rightarrow B(u_1, v_2) + B(u_2, v_1) = 0$$

$$\Rightarrow B(u_1, v_2) = -B(u_2, v_1)$$

Como esto vale $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$, $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$, ya que fueron tomados arbitrariamente, tenemos: $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$.

Obtenemos: $B(u_1, v_1) = -B(u_1, v_1)$

$\Rightarrow B(u_1, v_1) = 0 \quad \forall u_1 \in \mathbb{R}^n ; v_1 \in \mathbb{R}^m \longrightarrow$ ↯ pues $B \neq 0$

lo que se concluye

P3 a) Sea $b \in \mathbb{R}$, consideremos:

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculemos los valores propios de B. Para esto encontremos el polinomio característico $P_B(\lambda)$ dado por:

$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I)$ con I la identidad.

esto es: $P_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} b-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

Calculémoslo a través de la primera fila.

$$\det(B - \lambda I) = (b-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (b-\lambda)\left[-(1+\lambda)(2-\lambda) + 2\right]$$

$$= (b-\lambda)\left[-(-\lambda^2+\lambda+2)+2\right] = (b-\lambda)(\lambda^2-\lambda)$$

$$= (b-\lambda)\cdot\lambda\cdot(\lambda-1)$$

Con ello para todo $b \in \mathbb{R}$ los valores propios de B son $\{b, 1, 0\}$

→ los ceros de $P_B(\lambda)$.

En particular $\lambda = 1$ siempre es VP y mostramos lo pedido.

b) Queremos determinar para qué valores de b todos los vp. de B son ≥ 0.

En efecto $0 \geq 0$ y $1 \geq 0$ por lo que si tomamos

$b \geq 0$

se obtiene lo buscado.