MA1102-6 Álgebra lineal
Profesor: Martín Matamala
Auxiliar: Juan Pablo Sepúlveda

Auxiliar 9: Más transformaciones lineales y TNI

1t de octubre de 2022

P1. Te ene i Sea $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$, y $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Demuestre que B es base de $\mathbb{R}^4$.

b) Argumente que $dim(Im(T)) \geq 2$. Suponiendo además que $Im(T) \subseteq ker(T)$, calcule las dimensiones de $ker(T)$ y $Im(T)$. Dé bases de la imagen y del núcleo de la transformación T.

c) Demuestre que no existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $Im(T) = ker(T)$.

P2. Algo de abstracción Sea V un espacio vectorial, sobre $\mathbb{R}$, de dimensión n. Sea $U \subset V$ un subespacio vectorial de dimensión $n - 1$.

a) Probar que para todo $v \notin U$ se tiene $U \oplus \langle \{v\} \rangle = V$.

b) Sea S subespacio de V tal que S no está contenido en U. Probar que $S + U = V$. Calcular la dimensión de $S \cap U$ en función de la dimensión de S.

P3. Hable con mi representante [C2 2018-2] Sean V, W espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, y sean $B = \{v_1, v_2, v_3\} \subset V$, $A = \{w_1, w_2, w_3, w_4\} \subset W$ bases de estos espacios vectoriales. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal cuya matriz representante en estas bases es:

$$M_{A,B}(T) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) ¿Cuáles son las coordenadas de $T(3v_1 + 2v_2 - v_3)$ en la base A?

b) Dé una expresión de $T(3v_1 + 2v_2 - v_3)$ en función de w_1, w_2, w_3, w_4.

c) Pruebe que el $ker(M_{A,B}(T)) = \{0\}$ (Visto como subespacio de $\mathbb{R}^3$)

d) Demuestre que $ker(T) = \{0\}$ (Visto como subespacio de V) .

e) Hallar una base de la imagen de T.

P4. Se nos va de las manos?!?!?!? Considere las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Estudie si A, B son matrices invertibles.

b) ¿Pueden A y B ser matrices representantes de una misma transformación lineal L con respecto a distintas bases?

c) Encuentre Im y Ker de T_B, la transformación representada por B, y las dimensiones de dichos espacios.