Pauta Aux #7 Lineal

P1 a) Tenemos que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ cumple

$$\left[A^2 + A^3 + A^4 + 2I = 0\right] \quad (\star)$$

Queremos ocupar esto para ver que A es invertible. En efecto:

$(\star) \Rightarrow I = \frac{1}{2}(-A^2 - A^3 - A^4)$ Luego, basta ver que:

$$= \frac{1}{2} \cdot -(A \cdot A - A \cdot A^2 - A \cdot A^3)$$

$$= A \cdot \underbrace{\left[-\frac{1}{2} \cdot (A + A^2 + A^3)\right]}_{\text{"}B\text{"}}$$

Luego $\exists B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $I = AB$.

Como sabemos esto basta* para ver que A es invertible y $A^{-1} = B = \frac{-1}{2}(A + A^2 + A^3)$ ■

* Si tienen (en control) tiempo para chequear $BA = I$ también, sugiero fuertemente hacerlo.

b) $\Rightarrow$] Sea $x \in \mathbb{R}^m$ tq $A^T x = 0 \in \mathbb{R}^n$ PDQ $x = 0 \in \mathbb{R}^m$

En efecto, tenemos que: $(\heartsuit)$ $\left[AB = I \in \mathcal{M}_{m\times m}\right]$

y: $(\heartsuit) \Rightarrow (AB)^T = I^T \Leftrightarrow B^T A^T = I$

Ahora basta ver que: $A^T x = 0 \;/\; B^T \cdot$

$$\underbrace{B^T A^T}_{I} x = 0 \Leftrightarrow Ix = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;//$$

$\Leftarrow$] Directo. $x = 0 \;/\; A^T \cdot \Rightarrow A^T x = 0 \;//$

Con lo que probamos lo pedido. ■

2) Sistema:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{\alpha}{2} x_3 - x_4 = 0 \\ \alpha x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + \frac{\alpha}{2} x_3 = 1 \\ x_2 + \alpha x_3 + x_4 = \alpha \end{cases}$$

a) La matriz pedida:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{\alpha}{2} & -1 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & \alpha \end{array}\right)$$

Escalonamos:

$$\xrightarrow{E_{13}(-1)\cdot E_{12}(-\alpha)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\alpha/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha^2/2 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 & \alpha \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_{24}(-1)\, E_{23}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\alpha/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha^2/2 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-\alpha^2/2 & 1-\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-\alpha^2/2 & 1-\alpha & \alpha \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_{34}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\alpha/2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha^2/2 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-\alpha^2/2 & 1-\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-1 \end{array}\right)$$

Con lo que llegamos a lo pedido.

b) Como la última fila tiene sólo ceros a la izquierda, tenemos 2 casos:

$\alpha \neq 1 \Rightarrow$ Sistema incompatible (no hay solución).

$\alpha = 1 \Rightarrow$ cuarta fila sólo ceros: x_4 libre. Tenemos que las ecuaciones resultantes son:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_3 - x_4 = 0 \longrightarrow x_1 = 1 + x_4 \\ x_2 + x_3/2 + x_4 = 1 \longrightarrow x_2 = -1 - x_4 \\ \frac{x_3}{2} = 1 \longrightarrow x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 + x_4 \\ -1 - x_4 \\ 2 \\ x_4 \end{pmatrix} \right]$$

$\boxed{P3}$ a) Primero para que $\mathcal{B}$ sea base debe ser l.i. esto es, queremos probar:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Esto es, desarrollando la suma de matrices:

$$\begin{array}{l} 1^a \text{ componente} \\ 2,3^a \text{ componente} \\ 4^a \text{ componente.} \end{array} \left| \begin{array}{l} -\lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \alpha\lambda_3 = 0 \end{array} \right\} \text{ Sistema lineal !!}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & \alpha - 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha + 1 & 0 \end{array} \right)$$

Luego si $\alpha = -1$ hay infinitas soluciones, luego, el conjunto $\mathcal{B}$ no sería l.i., luego, no sería base.

Así, $\alpha \neq 1 \Rightarrow$ solución única

Luego, resolviendo el sistema: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Con ello, para ver que $\mathcal{B}$ es base, probaremos que $\dim(S_2) = 3$. Con lo que $\mathcal{B}$ es un conjunto l.i. del tamaño de la dimensión, i.e., es base.

Consideremos para esto:

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Vemos que $\mathcal{C}$ es l.i. y genera S_2 pues:

sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2$

$$A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow A \in \langle \mathcal{C} \rangle$. Luego $\mathcal{C}$ es base de S_2
Luego $\dim(S_2) = 3$

Con ello $\mathcal{B}$ es base de S_2.

b) Vemos que $S_2 \cap T = \{0\}$ pues

sea $M \in S_2 \cap T$: $W = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

$M \in T \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow W = 0.$

Además. $\dim(S_2) = 3$, $\dim(T) = 1$

y $\dim(S_2 + T) = \dim(S_2) + \dim(T) - \dim(\underbrace{S_2 \cap T}_{204})$

$= 4 = \dim(M_{2\times 2}(\mathbb{R}))$

Luego $S_2 + T = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ con lo que probamos lo pedido ∎