

MA1102-6 Álgebra lineal

Profesor: Martín Matamala

Auxiliar: Juan Pablo Sepúlveda



Auxiliar 6: Aún más espacios vectoriales

3 de octubre de 2022

P1. Más polinomios Sea el siguiente espacio vectorial:

$$U = \left\{ p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \mid p(1) = p'(1) = 0 \right\}$$

- Encuentre una base de U y su dimensión.
- Extienda la base encontrada a una de todo el espacio $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.
- Ahora considere, además:

$$W = \left\{ p \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \mid p''(0) = 0 \right\}$$

Encuentre una base de W y su dimensión.

- Caracterice el ev $U \cap W$, encuentre una base del mismo y su dimensión.
- Muestre que $\mathbb{P}_3(\mathbb{R}) = U + W$.
- Muestre que todo polinomio tiene dos escrituras de la forma $p = p_1 + p_2$ con $p_1 \in U, p_2 \in W$
- Concluya que $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ no es suma directa de U, W

P2. Nos encantan los polinomios Sea $m = 2n$ con $n > 0$ y considere el conjunto $\mathbb{P}_m(\mathbb{R})$ de los polinomios reales de grado menor o igual a m . Si cada $p \in \mathbb{P}_m(\mathbb{R})$ se escribe $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$, se define el conjunto $V = \{p \in \mathbb{P}_m(\mathbb{R}) \mid \forall i \in \{0, \dots, m\} \ a_i = a_{m-i}\}$

- Probar que V es subespacio vectorial de $\mathbb{P}_m(\mathbb{R})$ sobre los reales.
- Encontrar una base de V y deducir que su dimensión es $n + 1$.
- Probar que $\mathbb{P}_m(\mathbb{R}) = V \oplus \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$.
- Se define $V' = \{p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i \in \mathbb{P}_m(\mathbb{R}) \mid \forall i \in \{0, \dots, m\}, a_i = -a_{m-i}\}$. Probar que $\mathbb{P}_m(\mathbb{R}) = V \oplus V'$.

P3. EV's + TL's = F Sea $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ y V es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n , se define:

$$A(V) = \{Ax \mid x \in V\}.$$

- Pruebe que $A(V)$ es s.e.v. de \mathbb{R}^n .
- Sean V, W s.e.v. de \mathbb{R}^n tales que $V \oplus W = \mathbb{R}^n$. Pruebe que si A es invertible si y sólo si $A(V) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$.