MA1102-6 Álgebra lineal
Profesor: Martín Matamala
Auxiliar: Juan Pablo Sepúlveda

Auxiliar 5: Más espacios vectoriales y bases

26 de septiembre de 2021

P1. Un poco de teoría (y spoilers)

a) Considere $S, T \subseteq V$ dos subespacios de un espacio vectorial V. Demuestre que $S \cup T$ es un subespacio de V si y sólo si $S \subseteq T \vee T \subseteq S$

b) Sea $T : V \to \mathbb{R}$ una función, donde V es un ev de $\mathbb{R}$, tal que cumple:

$$\forall u, v \in V, \lambda \in \mathbb{R} \;\; T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v)$$

Definimos:

$$K = \left\{ k \in V \;\middle|\; T(k) = 0 \right\}$$

Demuestre que K es un espacio vectorial.

P2. El encontrador de bases Sea el siguiente espacio vectorial:

$$W = \left\{ ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + b = \frac{2c}{7}, b - a = \frac{c}{21} \right\}$$

a) Muestre que $C = \{\frac{5}{42}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x, 1, 5x^3 + 7x^2 + 42x + \pi\}$ genera W. ¿Es C una base?

b) Encuentre una base de W contenida en C.

c) Determine si es posible extender el conjunto $\{1\}$ a una base de W usando sólo elementos que no pertenezcan al generado por $\{\frac{5}{42}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + x, 5x^3 + 7x^2 + 42x + \pi\}$, y de ser posible, hágalo.

P3. Sistemas + espacios = F. Sea el siguiente conjunto:

$$S = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \;\middle|\; 2a + f - h = -b + 3d + 2g = c + \frac{e}{2} - 7i = 0 \right\}$$

a) Pruebe que S es un sev de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

b) Encuentre una base de S y deduzca su dimensión.

c) Muestre que $C = \langle W \rangle$, con

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Es tal que, si llamamos B a la base encontrada en *b)*, $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) = \langle B \cup W \rangle$, y además $S \cap C = \{\overrightarrow{0}\}$