Pauta Auxiliar #4 Lineal.

P1] α) Para ver que $V = M_{2\times2}(\mathbb{R})$ sea un espacio vectorial con la ponderación escalar usual. Debemos ver 2 cosas a grandes rasgos

1) $(V,+)$ es un grupo abeliano. Esto se tiene de la unidad de matrices.

2) Se cumplen las 4 leyes de espacios vectoriales:

(EV1) $\left[\begin{array}{l}\forall \lambda,\beta \in \mathbb{R},\ \forall A \in V:\\ (\lambda+\beta)A = \lambda A + \beta A\end{array}\right]$

En efecto sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$:
y sean $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\lambda+\beta)A = (\lambda+\beta)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda+\beta)a & (\lambda+\beta)b \\ (\lambda+\beta)c & (\lambda+\beta)d \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a+\beta a & \lambda b+\beta b \\ \lambda c+\beta c & \lambda d+\beta d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a & \beta b \\ \beta c & \beta d \end{pmatrix}$$

$$= \lambda\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \lambda A + \beta A. \quad //$$

(EV2) $\left[\begin{array}{l}\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall A,B \in V\\ \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B\end{array}\right]$

En efecto, sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$
y sea $\lambda \in \mathbb{R}$.

Veamos que: $\lambda(A+B) = \lambda\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right]$

$$= \lambda\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(a+e) & \lambda(b+f) \\ \lambda(c+g) & \lambda(d+h) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a+\lambda e & \lambda b+\lambda f \\ \lambda c+\lambda g & \lambda d+\lambda h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda e & \lambda f \\ \lambda g & \lambda h \end{pmatrix}$$

$$= \lambda A + \lambda B \quad //$$

(EV3) $\left[\begin{array}{c}\forall \lambda,\beta \in \mathbb{R} \quad \forall A \in V \\ \lambda(\beta A) = (\lambda\beta) A\end{array}\right]$ En efecto, sean $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

Vemos que: $\lambda(\beta A) = \lambda \begin{pmatrix} \beta a & \beta b \\ \beta c & \beta d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(\beta a) & \lambda(\beta b) \\ \lambda(\beta c) & \lambda(\beta d) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} (\lambda\beta)a & (\lambda\beta)b \\ (\lambda\beta)c & (\lambda\beta)d \end{pmatrix} = (\lambda\beta) A$ //

(EV4) $\left[\begin{array}{c}\forall A \in V \\ 1 \cdot A = A\end{array}\right]$ En efecto, sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

Vemos que: $1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot a & 1\cdot b \\ 1\cdot c & 1\cdot d \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$ //

Con lo que $(V, + ; \cdot)$ es un e.v.

b) Queremos ver que: $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; a+d=0 \right\}$

Sean subespacios vectoriales de V $\quad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix} \in V \right\}$

Para que un conjunto W sea subespacio vectorial (sev) de un espacio vectorial V debe cumplir

(sev 1). $\left[\begin{array}{c}\forall A,B \in W \\ A+B \in W\end{array}\right]$ (SEV 2) $\left[\begin{array}{c}\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in W \\ \lambda A \in W\end{array}\right]$

Vamos con W_1:

(SEV 1) Sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$. $B = \begin{pmatrix} d & e \\ f & -d \end{pmatrix}$

(notar que $a_{11} + a_{22} = 0 \Leftrightarrow a_{11} = -a_{22}$)

Vemos que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \\ f & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & b+e \\ c+f & -a-d \end{pmatrix}$

y en efecto $(a+d) + (-a-d) = 0$, es decir $A+B \in W_1$ //

(SEV 2) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in W_1$ = $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$

En efecto:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & -\lambda a \end{pmatrix}$$ que cumple $\lambda a - \lambda a = 0$ //

Vamos con W_2 =

(SEV 1) Sean $A, B \in W_2$: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} d & e \\ -d & f \end{pmatrix}$

En efecto:

$$A+B = \begin{pmatrix} a+d & b+e \\ -a-d & c+f \end{pmatrix} \in W_2$$

(SEV 2) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix} \in W_2$

En efecto:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ -\lambda a & \lambda b \end{pmatrix} \in W_2$$

Con lo que tanto W_1 como W_2 son sev's de W.

c) En efecto, W_3 NO ES sev de V

Consideremos $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in W_3$ y $\frac{\pi}{4} \in \mathbb{R}$

Tenemos que

$$\frac{\pi}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \pi/4 \\ \pi/4 & 0 \end{pmatrix} \notin \mathbb{R}$$

pues $\frac{\pi}{4} \notin \mathbb{Q}$, es decir, no cumple (SEV 2)

d) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W_1 \cap W_2$. Veamos qué forma tiene A.

- Como $A \in W_1$: $d = -a$. Luego $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -a \end{pmatrix}$
- Como $A \in W_2$: $c = -a$

Así:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ -a & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ con lo que probamos lo pedido.

d) En efecto, es única. Supongamos que no lo es:

$$A = a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - a_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - b_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (a_1 - a_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + (b_1 - b_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ a_2 - a_1 & a_2 - a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Luego:

$a_1 = a_2 \quad \wedge b_1 = b_2$ $\blacksquare$

P2) Veremos que lo que necesitamos es:

1) Existe una única solución y es $x = \vec{0}$

2) Existen infinitas soluciones y $b = \vec{0}$.

Caso 1: El conjunto $\{\vec{0}\}$ siempre es un e.v. (materia de clases).

Caso 2: Si existen infinitas soluciones, obtenemos que, si el escalonamiento es de la forma:

$\tilde{A}x = \tilde{b}$ tenemos que, sin pérdida de generalidad

$$0 \cdot x_n = 0 \Rightarrow x_n \text{ es libre}$$

y $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $\tilde{a_{kk}} \neq 0$:

$$x_k = \left(\tilde{b_k} - \sum_{j=k+1}^{n} \tilde{a_{kj}} \cdot x_j \right) \cdot \frac{1}{\tilde{a_{kk}}} \quad \left(\tilde{a_{kk}} = 0 \Rightarrow x_k \text{ libre} \right)$$

Luego el conjunto de soluciones luce como:

$$\{ x \in \mathbb{R}^n : \forall k \in \{1, \dots, n-1\} \text{ tq } \tilde{a_{kk}} \neq 0 \quad x_k = \tilde{b_k} - \sum_{j=k+1}^{n} \tilde{a_{kj}} \cdot x_j \}$$

Si $\tilde{b}_k = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}$ obtenemos que cada componente de los "X" en cuestión será una combinación lineal de sus variables libres, más aún, esta c.l. es fija por lo que, de hecho, se obtiene que.

Como $\forall k \in \{1, \dots, n\}$

$$X_k = \sum_{\substack{i \neq k \\ i \leq n}} \tilde{\lambda}_{k,i} \cdot X_i \quad \text{tales que } \lambda_{ki} = 0 \text{ si } X_i \text{ no es libre}$$

$$\Rightarrow \{X \mid Ax = b\} = \left\langle \left\{ \left(\sum \tilde{\lambda}_{ki}\right)_k \;\middle|\; X_i \text{ es libre} \right\} \right\rangle$$

Lo cual es un espacio vectorial.

* NOTA: esta demostración es difícil de entender completamente, así que no duden en preguntar sin miedo si queda alguna duda :)

P3 En efecto, si $x = 0$, de la identidad dada, obtenemos

$$\alpha \cdot \cancel{\operatorname{sen}(0)} + \beta \cdot \cancel{\cos(0)} = 0$$

$$\rightarrow \quad \beta = 0$$

Similarmente si $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\alpha \cdot \cancel{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \beta \cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 0 \quad //$$

La idea tras este pequeño ejercicio es introducir la noción de independencia lineal, que verán a continuación en el curso y será muy importante para lo que queda de ramo.

P4 a) Sean $A \subseteq B \subseteq V$. Tenemos que probar que $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$ es decir:

$\forall v \in \langle A \rangle$, $v \in \langle B \rangle$.

En efecto, sea $v \in \langle A \rangle$ arbitrario. Como v pertenece al generado por A:

$\exists \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}$, $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq A$

tales que: $v = \lambda_1 \cdot a_1 + \ldots + \lambda_n \cdot a_n$

pero como $A \subseteq B$ $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq B$.

$\Rightarrow \exists \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}$, $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq B$ tales que

$v = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n \cdot a_n$ esto es, por definición que $v \in \langle B \rangle$

Con lo que probamos lo pedido //

b) Recordemos* que una caracterización del subespacio generado por un conjunto C es que $\langle C \rangle$ es el subespacio vectorial MÁS PEQUEÑO que contiene a C.

Con esto la implicancia $\boxed{\Leftarrow}$ es directa. (¿Por qué? Meditarlo).

Para $\boxed{\Rightarrow}$: sea $C \subseteq V$ tal que $C = \langle C \rangle$. Como $\langle C \rangle$ es sev de V, entonces C es sev de V.

Con esto, probamos lo pedido.

* Si esto no se vió en clases / Apunte, avisarme por correo y subo demostración.