MA1102-6 Álgebra lineal
Profesor: Martín Matamala
Auxiliar: Juan Pablo Sepúlveda

Auxiliar 4: Espacios vectoriales

5 de septiembre de 2022

P1. Sub-subespacio Sea $V = \mathcal{M}_{2x2}(\mathbb{R})$. Definimos:

$$W_1 = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \ a + d = 0 \right\}$$

$$W_2 = \left\{ A = \begin{pmatrix} -x & y \\ x & z \end{pmatrix} \mid \ x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$W_3 = \left\{ A = \begin{pmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{pmatrix} \mid \ p, q \in \mathbb{Q} \right\}$$

α) Chequear que V es un espacio vectorial.

a) Muestre que W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de V.

b) Determine si W_3 es subespacio vectorial de W_1

c) Muestre que todo elemento de $W_1 \cap W_2$ se puede escribir como una combinación lineal de:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

d) **[Propuesto]** ¿Es única esta descomposición? Demuéstrelo.

P2. Más espacios Considere una matriz A de $n \times n$, y b un vector de n componentes. Determine condiciones sobre A y b que impliquen que el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$ sea un espacio vectorial.

P3. Algo más raro. Considere el conjunto $\{f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \ \mid f \text{ es función}\}$. Este conjunto, unido a la suma de funciones tradicional, y la ponderación por escalar, es un espacio vectorial. Muestre que, si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cumplen que:

$$\forall x \in [0, 2\pi] \quad \alpha \cdot sen(x) + \beta \cdot cos(x) = 0 \iff \alpha = \beta = 0$$

P4. Nos ponemos teóricos. Sea V un espacio vectorial. Muestre que:

a) Si tenemos $A, B \subseteq V$ Entonces $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$.

b) **[Propuesto]** Si $C \subseteq V$, entonces $C = \langle C \rangle \iff$ C es un subespacio vectorial de V.