Pauta Aux #2 Lineal

P1) El sistema queda dado por:

$$3x_1 + x_3 = 900$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 700$$
$$2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1000$$
$$x_1 + x_4 = 300$$

Esto planteado matricialmente queda:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 0 & 900 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 700 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1000 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 300 \end{array}\right)$$

Escalonamos:

TIP: no es necesario escalonar "de arriba hacia abajo".

$$\xrightarrow{E_{41}(-3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 400 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1000 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 300 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{23}(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 200 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 300 \end{array}\right)$$

Esto visto como ecuaciones:

(i) $x_3 - 3x_4 = 0$
(ii) $x_2 + x_3 = 400$
(iii) $2x_4 = 200 \longrightarrow x_4 = 100$
(iv) $x_1 + x_4 = 300$

$$\xrightarrow[+(i)]{} x_3 = 3x_4 = 300 \xrightarrow[+(ii)]{} x_2 = 400 - x_3 = 100$$

y, de (iv): $x_1 = 300 - x_4 = 200$

Así el helado A vale \$200, el tipo B vale \$100, el tipo C vale \$300, y el tipo D vale \$100

P2) Escalonemos el sistema planteado matricialmente

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & a & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & b+2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{13}(1)]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & b+2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[E_{14}(-2)]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & b & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[E_{24}(-1)]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & b-1 & -3 \end{array}\right)$$

¿Podemos ahora aplicar $E_{34}\left(\frac{1}{a}\right)$?

NO!!, notemos que el caso $a=0$ nos puede invalidar el desarrollo.

Pongámonos en casos:

I.- $a=0$: en este caso la 3ª ecuación (fila) nos queda:

$$a \cdot z = 1 \xRightarrow[a=0]{} 0 \cdot z = 1 \longrightarrow \lightning$$

$\nexists\, z \in \mathbb{R}$ que cumpla esto, por lo que para $a=0$ el sistema no tiene solución

II.- $a \neq 0$: En este caso podemos terminar de escalonar:

$$\xrightarrow[E_{34}\left(\frac{1}{a}\right)]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 & \frac{1}{a}-3 \end{array}\right)$$

Veamos como quedan las ecuaciones:

(i) $x + w = 2$
(ii) $y + z + w = 3$
(iii) $a \cdot z = 1$
(iv) $(b-1)\, w = \frac{1}{a} - 3$

Analicemos (iv):

- Si $(b-1)=0$ nos queda $(b=1)$

(iv) $0 \cdot w = \frac{1}{a} - 3 = \frac{1-3a}{a}$

- Si $1-3a \neq 0$, nos queda

$0 \cdot x_4 \neq 0$, por lo que nuevamente el sistema no tiene solución.

- Si $1-3a=0$ nos queda: $(a = 1/3)$

(iv) $0 \cdot w = 0 \longrightarrow$ Esto es cierto $\forall\, w \in \mathbb{R}$.

- y vemos que, resolviendo tomando w como parámetro:

de (i): $x = 2-w$

de (iii): $z = \frac{1}{a} = 3$

de (ii)

$y = 3 - z - w = -w$

- $\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-w \\ -w \\ 3 \\ w \end{pmatrix}$ nos da una solución del sistema para cada $w \in \mathbb{R}$.

Luego, tenemos que si $b=1$ y $a=\frac{1}{3}$ el sistema tiene infinitas soluciones.

- Si $(b-1) \neq 0$, es decir, $b \neq 1$

podemos resolver: $(iii) \longrightarrow \left[z = 1/a \right]$

$(iv) \rightarrow \left[w = \frac{1-3a}{a(b-1)} \right] \xrightarrow{+(i)} \left[x = 2 - w = 2 - \frac{1-3a}{a(b-1)} \right]$

$\xrightarrow{+(ii)} \left[y = 3 - \frac{1-3a}{a(b-1)} - \frac{1}{a} \right]$ //

P3 En resumen, queremos probar que:

$A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$. Estudiemos $A \cdot A^T$:

$$(A \cdot A^T)_{ij} := \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} \cdot (A^T)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cdot A_{jk}$$

Así debemos notar varias cosas:

1) A_{ik} y A_{jk} siempre pertenecen a la misma columna. Con esto como A es matriz de permutación tenemos que

$$\underline{i \neq j} \Rightarrow A_{ik} = 0 \vee A_{jk} = 0$$

$$\Rightarrow \forall k \; A_{ik} \, A_{jk} = 0 \Rightarrow \underline{(A A^T)_{ij} = 0}$$

2) Si $i = j$, tenemos que:

$$(AA^T)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cdot A^T_{ki} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cdot A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (A_{ik})^2$$

Lo cual corresponde a sumar los cuadrados de los coeficientes a lo largo de toda una fila, por lo que como A es de permutación, todos los términos valdrán 0, excepto uno, que valdrá 1

Luego, necesariamente:

$$(AA^T)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} (A_{ik})^2 = 0 + 0 + \ldots + 0 + 1 + 0 + \ldots + 0$$

$$= \underline{1}$$

Con lo que $(AA^T)_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

Lo cual es por definición, I.

Así:

$A \cdot A^T = I$. Falta probar que $A^T A = I$.

En efecto:

$$(A^T A) = (A A^T)^T = (I)^T = I$$ con lo que probamos lo pedido ▨

$\boxed{P4}$ Tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -12 & 11 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Y queremos encontrar X matriz tal que

$$X \cdot A = B.$$

IDEA: B tiene forma de "escalonada" (es triangular superior) y tiene la misma primera fila que A.

Con esto en mente podemos intentar "escalonar" A hasta llegar a B (recordemos que escalonar no es más que multiplicar por matrices por la izquierda)

Entonces:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 7 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{12}(-3/2)]{} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -6 & 11/2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{13}(1/2)]{} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -6 & 11/2 \\ 0 & 2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{23}(1/3)]{} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -6 & 11/2 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{pmatrix} \xrightarrow[D_2^*(2)]{} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -12 & 11 \\ 0 & 0 & 7/3 \end{pmatrix} \xrightarrow[D_3^*(3)]{} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -12 & 11 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

* Donde $D_2(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad D_3(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Con ello obtuvimos:

$$\left[\underbrace{D_3(3)\cdot D_2(2)\cdot E_{23}(1/3)\cdot E_{13}(1/2)\cdot E_{12}(-3/2)}_{X}\, A = B\right]$$

Notemos que esta multiplicación corresponde a aplicarle transformaciones elementales a $E_{12}(-3/2)$

$$E_{12}(-3/2) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{13}(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{23}(1/3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{D_2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{D_3(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$