Pauta Aux #1 Lineal.

P1) Consideramos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1/2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) $-3 \cdot B + D$

$$-3B + D = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 \cdot 2 & -3 \cdot 9 \\ -3 \cdot 0 & -3 \cdot 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -27 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6+2 & -27+0 \\ 0+0 & -9+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -27 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$$

b) $C + D$

$$C + D = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ¿¿?$$

Recordar: la suma de matrices debe ser entre matrices de las mismas dimensiones.

c) $A \cdot C$

TIP: siempre al hacer un producto matricial haz el siguiente procedimiento:

$$\begin{array}{ccc} A & \cdot & C \\ 2 \times 3 & & 2 \times 1 \end{array}$$

estos dos DEBEN ser iguales para sacar producto.

2×1

Si las marcadas con verde son iguales, entonces las dimensiones de la matriz producto se obtienen de acá.

En este caso, como NO son iguales el nº de columnas de A (3), y el nº de filas de C (2), NO podemos calcular el producto $A \cdot C$ //

d) $C^T \cdot D \cdot A$.

$$C^T \cdot D \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1/2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Veamos si es legal calcular este producto.

$$\left.\begin{array}{cc} C^T & D \\ \downarrow & \downarrow \\ 1 \times 2 & 2 \times 2 \end{array}\right\} \quad C^T D \text{ es de } 1 \times 2$$

y A su vez: $(C^T D)\ A \Rightarrow C^T D A$ es de 1×3

$$\begin{array}{ccc} (C^T D) & & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 \times 2 & ; & 2 \times 3 \end{array}$$

Partamos calculando $C^T D$: $(C^T D)_{ij} = \sum_{k=1}^{2} C^T_{ik} \cdot D_{kj}$

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 6 \cdot 2 + (-3) \cdot 0 = 12 \\ b = 0 \cdot 6 + (-3) \cdot 2 = -6 \end{array}\right\} \ C^T D = \begin{pmatrix} 12 & -6 \end{pmatrix}$$

Ahora $C^T D \cdot A$

$$\begin{pmatrix} 12 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1/2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$$

$$a = 12 \cdot 2 + (-6) \cdot \frac{1}{2} = 24 - 3 = 21$$

$$b = 12 \cdot 7 + (-6) \cdot 3 = 84 - 18 = 66$$

$$c = 12 \cdot (-1) + (-6) 4 = -12 - 24 = -36$$

Luego $C^T D A = \begin{pmatrix} 21 & 66 & -36 \end{pmatrix}$

e)

$B \cdot A \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1/2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Vemos que

$$\left.\begin{array}{c} B \cdot A \\ \swarrow \qquad \searrow \\ 2 \times 2 \quad 2 \times 3 \end{array}\right\} 2 \times 3$$

son iguales.

Luego: $B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

Vemos que:

$$a = (BA)_{11} = \sum_{k=1}^{2} b_{1k} \cdot a_{k1}$$

$$= b_{11} \cdot a_{11} + b_{12} \cdot a_{21} = 2 \cdot 2 + 9 \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$$

$$b = (BA)_{12} = \sum_{k=1}^{2} b_{1k} \cdot a_{k2} = b_{11} \cdot a_{12} + b_{12} \cdot a_{22}$$

$$= 2 \cdot 7 + 9 \cdot 3 = 41$$

$$c = (BA)_{13} = \sum_{k=1}^{2} b_{1k} \cdot a_{k3} = b_{11} \cdot a_{13} + b_{12} \cdot a_{23}$$

$$= 2 \cdot (-1) + 9 \cdot 4 = 34$$

$$d = (BA)_{21} = \sum_{k=1}^{2} b_{2k} \cdot a_{k1} = b_{21} \cdot a_{11} + b_{22} \cdot a_{21}$$

$$= 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1/2 = 3/2$$

$$e = (BA)_{22} = \sum_{k=1}^{2} b_{2k} \cdot a_{k2} = b_{21} \cdot a_{12} + b_{22} \cdot a_{22}$$

$$= 0 \cdot 7 + 3 \cdot 3 = 9$$

$$f = (BA)_{31} = \sum_{k=1}^{2} b_{2k} \cdot a_{k3} = b_{21} \cdot a_{13} + b_{22} \cdot a_{23}$$

$$= 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 = 12$$

Luego: $B \cdot A = \begin{pmatrix} 17/2 & 41 & 34 \\ 3/2 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

$\boxed{P2}$ P idempotente ssi $P^2 = P$ $(*)$

a) Muestre P idempotente $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$ $P^k = P$.

Ocupamos inducción sobre k:

CB: veamos 2 casos base ($k=1$ y $k=2$)

- $k=1$: Es directo que $P^k = P^1 = P$
- $k=2$: En efecto: $P^k = P^2 = P$ pues P cumple $(*)$

HI: Supongamos que para algún $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$P^n = P \quad (*)$$

PI: PDQ: $P^{n+1} = P$. En efecto, de la def. de potencia de una matriz:

$$P^{n+1} = (P^n) \cdot P \overset{(*)}{=} P \cdot P = P^2 \overset{(*)}{=} P.$$

Con lo que, por inducción, se prueba lo pedido ∎

b) Muestre $A = (I - P)$ con P idempotente $\Rightarrow A$ idempotente.

En efecto, calculemos A^2:

$$A^2 = (I-P)(I-P) = I \cdot I - I \cdot P - P \cdot I + P \cdot P$$

$$= I - P - P + P^2 = I - 2P + P^2 \overset{(*)}{=} I - 2P + P = I - P = A$$

Con lo que A idempotente ∎

c) $A = AB \wedge B = BA \Rightarrow A$ y B idempotentes.

En efecto:

$$A^2 = (A) A = (AB) \cdot A = A \cdot (BA) = A \cdot B = A$$

$$B^2 = (B) B = (BA) B = B \cdot (AB) = B \cdot A = B$$

Luego $B^2 = B$ y $A^2 = A$, con lo que A y B son idempotentes ∎

P3 a) A invertible que cumple

$$A\cdot(A^2+3A+I)=0 \quad (\star)$$

PDQ

$$A^{-1}=-A-3I$$

En efecto basta probar que:

$$A(-A-3I)=(-A-3I)A=I$$

La primera igualdad es directa pues:

$$A(-A-3I)=-A^2-3A=-A\cdot A-3I\cdot A$$

$$=(-A-3I)\cdot A$$ y la segunda es cierta pues:

De $(\star)$ tenemos que:

existe pues se dice que A es invertible.

$$A\cdot(A^2+3A+I)=0 \quad \Big/ \; A^{-I}\cdot$$

$$\Rightarrow A^2+3A+I=0$$

$$\Rightarrow I=-A^2-3A=(-A-3I)A$$

b) Sea B invertible que cumple $B^3=0$ $(\clubsuit)$

Definimos

$$M:\mathbb{R}\to M_{nn}(\mathbb{R})$$

$$\lambda \mapsto M(\lambda)=I+\lambda B+\frac{\lambda^2}{2}B^2.$$

Muestre (i) $M(\lambda+\beta)=M(\lambda)M(\beta)$

(ii) $M(\beta)M(\lambda)=M(\lambda)M(\beta)$

(iii) $M(\lambda)$ es invertible y $M^{-1}(\lambda)=M(-\lambda)$.

(i) $M(\lambda)M(\beta)=\left(I+\lambda B+\frac{\lambda^2}{2}B^2\right)\left(I+\beta B+\frac{\beta^2}{2}B^2\right)$

$$=I+\beta B+\frac{\beta^2}{2}B^2+\lambda B+\lambda\beta B^2+\frac{\lambda\beta^2}{2}B^3+\frac{\lambda^2}{2}B^2+\frac{\lambda^2\beta}{2}B^3$$

$$+\frac{\lambda^2\beta^2}{4}B^4 \overset{(\clubsuit)}{=} I+\beta B+\frac{\beta^2}{2}B^2+\lambda B+\beta B+\lambda\beta B^2$$

$$= I + (\lambda+\beta) B + \left[\frac{\lambda^2}{2} + \lambda\beta + \frac{\beta^2}{2}\right] B^2$$

$$= I + (\lambda+\beta) B + \left[\frac{\lambda^2 + 2\lambda\beta + \beta^2}{2}\right] B^2$$

$$= I + (\lambda+\beta) B + \frac{(\lambda+\beta)^2}{2} B^2 =: M(\lambda+\beta)$$

Con lo que probamos lo pedido ∎

(ii) En efecto notemos que, usando (i):

$$M(\lambda) M(\beta) = M(\lambda+\beta) = M(\beta+\lambda) = M(\beta) M(\lambda)$$ ∎

(iii) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ notemos que, usando (i) y (ii):

$$M(-\lambda) M(\lambda) = M(\lambda) M(-\lambda) = M(\lambda - \lambda) = M(0)$$

$$= I + 0 \cdot B + \frac{0^2}{2} \cdot B^2 = I.$$

Con lo que obtenemos lo buscado ∎

P4) Consideremos D diagonal de $n \times n$, A de $p \times n$ y B de $n \times q$.

Veamos como luce DB: ocupando def del producto matricial:

$$(DB)_{ij} := \sum_{k=1}^{n} d_{ik} \cdot b_{kj}$$ ocupemos que si $k \neq i$ $d_{ik} = 0$.

con esto
$$d_{ik} \cdot b_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ d_{ii}\, b_{ij} & \text{si } k = i. \end{cases}$$

$$\Rightarrow (DB)_{ij} = d_{ii} \cdot b_{ij}$$

Así, observando que i es fijo a lo largo de una fila, obtenemos que multiplicar por la izquierda por una matriz diagonal pondera cada fila "i" por el d_{ii} correspondiente.

Similarmente:

$$(AD)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot d_{kj}$$ siguiendo la misma lógica:

$$(AD)_{ij} = a_{ij} \cdot d_{jj}$$

Ahora es el "j" (la columna) la que se pondera por el mismo d_{jj} (el j-ésimo coef. de D).