MA1102-3: Álgebra Lineal
Profesor: Alejandro Maass
Auxiliares: Nicolás Toro

Auxiliar 12

P1. Multiplidad Geometrica y Algebraica. Recordemos que dado un valor propio λ de una matriz A, la Multiplicidad Geometrica es la dimension de $W_\lambda = \ker(A - \lambda I)$, mientras que la Multiplicidad Algebraica es la cantidad de veces que λ aparece como raíz de $p_A(\lambda)$ (polinomio característico de A)

a) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

i) Encuentre todos los valores propios de A

ii) Para cada valor propio de A, determine su multiplidad algebraica y geometrica.

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$

i) Encuentre todos los valores propios de A

ii) Para cada valor propio de A, determine su multiplidad algebraica y geometrica.

c) Determine si $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ es diagonalizable

d) **[Propuesto]** Sean $A, B \in \mathcal{M}(n \times n)$. A y B se dicen *similares* si $B = S^{-1}AS$ para alguna matriz $S \in \mathcal{M}(n \times n)$ invertible.

i) Muestre que las matrices similares tienen los mismos valores propios, incluyendo sus multiplicidades.

ii) Sea λ un valor propio de A. Muestre que la multiplicidad geometrica de λ es a lo mas la multiplicidad algebraica de λ.
Hint: Sea λ un valor propio de A. Sea $\{v_1, ..., v_k\}$ una base de W_λ (espacio propio). Extienda esta base a una base $\{v_1, ..., v_n\}$ de $\mathcal{M}_{n\times n}$. Considere la matriz $S = [v_1 \cdots v_n]$. Que puede decir sobre las primeras k columnas de la matriz $B = S^{-1}AS$?.

P2. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Determine el polinomio característico de A

b) Determine los valores y vectores propios de A. Verifique si A es definida positiva e invertible

c) Construya una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A

d) Diagonalice A, si es posible, es decir, encuentre matrices P ortogonal y D diagonal tales que $A = PDP^{-1}$ y escriba una matriz diagonal $\tilde{D}$ tal que $A^{-1} = P\tilde{D}P^{-1}$