MA1102-3: Álgebra Lineal
Profesor: Alejandro Maass
Auxiliares: Nicolás Toro

Auxiliar 9

P1. Considere $\mathbb{C}$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y la transformación lineal $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $T(z) = (1 + \sqrt{3}i) \cdot z$

a) Encuentre la matriz representante de T respecto a la base canonica $\beta_{\mathbb{C}} = \{1, i\}$ de $\mathbb{C}$, es decir $M_{\beta_{\mathbb{C}}\beta_{\mathbb{C}}}(T)$

b) Usando matrices de cambio de base, determine la matriz representante de T con respecto a la base $\beta = \{1 + i, 1 - i\}$. Es decir $M_{\beta\beta}(T)$. Explcite todas las matrices usadas.

P2. Sea $\mathcal{S}_2$ el espacio vectorial de las matrices simetricas de 2×2 con coeficientes reales. Dada $B \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$ considere la transformación lineal $T : \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_2$ definida por:

$$T(X) = BX + X^t B^t, \quad \text{con } X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$$

a) Verificar que T esta bien definida

b) Para $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ encuentre la matriz representante de T respecto a la base canónica de $\mathcal{M}_{22}(T)$ y la base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{S}_2$

c) Para $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ encuentre bases y dimensiones de $\mathrm{Ker}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$

P3. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ la aplicación lineal $T(p)(x) = xp(x)$

a) Calcule la matriz representante de T con respecto a las bases canónicas

b) Calcule, usando cambio de bases, la matriz representante de T con respecto a las bases

$$\mathcal{A} = \{1, x - 1, (x - 1)^2\} \subseteq \mathbb{R}_2[x], \quad \mathcal{B} = \{1, -x.x^2, x^2 - x^3\} \subseteq \mathbb{R}_3[x]$$

P4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que su matriz representante con respecto a la base

$$\beta = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$$

en la partida y en la llegada es:

$$M_{\beta\beta}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Encuentre la matriz representante de T respecto a la base β en la partida y la base canónica en la llegada

b) Existen bases β_1,β_2 de $\mathbb{R}^3$ tales que $M_{\beta_1\beta_2}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?