Control 3

P1. Calcule, sin usar inducción, las siguientes sumatorias:

a) (3,0 pts.)

$$\sum_{k=2}^{n-1}\binom{n}{k}3^k2^{-k}$$

para $n \geq 3$.

Solución:
Esta sumatoria se parece a un binomio de Newton, pero debemos "arreglarla" antes de poder aplicar el teorema del binomio. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n-1}\binom{n}{k}3^k2^{-k} &= \sum_{k=2}^{n-1}\binom{n}{k}\left(\frac{3}{2}\right)^k && \text{(Propiedades de potencias – \textbf{0,4 pts.})}\\
&= \sum_{k=2}^{n-1}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(\frac{3}{2}\right)^k && (1^{n-k}=1 \text{ – } \textbf{0,4 pts.})\\
&= \sum_{k=2}^{n-1}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(\frac{3}{2}\right)^k\\
&\quad + \binom{n}{0}1^{n-0}\left(\frac{3}{2}\right)^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^1 + \binom{n}{n}1^{n-n}\left(\frac{3}{2}\right)^n\\
&\quad - \binom{n}{0}1^{n-0}\left(\frac{3}{2}\right)^0 - \binom{n}{1}1^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^1 - \binom{n}{n}1^{n-n}\left(\frac{3}{2}\right)^n\\
& && \text{(Sumar y restar términos – \textbf{0,4 pts.})}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\left(\frac{3}{2}\right)^k - \binom{n}{0}1^{n-0}\left(\frac{3}{2}\right)^0 - \binom{n}{1}1^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^1 - \binom{n}{n}1^{n-n}\left(\frac{3}{2}\right)^n\\
& && \text{(Incluir los términos sumados en la sumatoria – \textbf{0,4 pts.})}\\
&= \left(1+\frac{3}{2}\right)^n - \binom{n}{0}1^{n-0}\left(\frac{3}{2}\right)^0 - \binom{n}{1}1^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^1 - \binom{n}{n}1^{n-n}\left(\frac{3}{2}\right)^n\\
& && \text{(Binomio de Newton – \textbf{0,9 pts.})}\\
&= \left(\frac{5}{2}\right)^n - \binom{n}{0}1^{n-0}\left(\frac{3}{2}\right)^0 - \binom{n}{1}1^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^1 - \binom{n}{n}1^{n-n}\left(\frac{3}{2}\right)^n && \left(1+\tfrac{3}{2}=\tfrac{5}{2}\right)\\
&= \left(\frac{5}{2}\right)^n - \binom{n}{0} - \frac{3}{2}\binom{n}{1} - \binom{n}{n}\left(\frac{3}{2}\right)^n && \text{(Calcular las potencias)}\\
&= \left(\frac{5}{2}\right)^n - 1 - \frac{3}{2}n - \left(\frac{3}{2}\right)^n && \left(\tbinom{n}{0}=1,\ \tbinom{n}{1}=n \text{ y } \tbinom{n}{n}=1 \text{ – } \textbf{0,5 pts.}\right)\\
&= \left(\frac{5}{2}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3}{2}n - 1. && \text{(Reordernar)}
\end{aligned}$$

b) (3,0 pts.)

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j+1}\binom{n}{k}\binom{m}{j}.$$

Solución:
Nuevamente tenemos que construir binomios de Newton. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j+1}\binom{n}{k}\binom{m}{j} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j+1}\binom{m}{j} && \left(\tbinom{n}{k} \text{ no depende de } j \text{ – } \textbf{0,2 pts.}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{j+1}\frac{m!}{j!(m-j)!} && \left(\text{Definición de } \tbinom{m}{j} \text{ – } \textbf{0,2 pts.}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{m}\frac{m!}{(j+1)!(m-j)!} && \left((j+1)j! = (j+1)! \text{ – } \textbf{0,2 pts.}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{m}\frac{m+1}{m+1}\frac{m!}{(j+1)!(m-j)!}\\
& && \left(\text{Multiplicar y dividir por } m+1 \text{ – } \textbf{0,2 pts.}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{m+1}\frac{(m+1)!}{(j+1)!(m-j)!} && \left((m+1)m! = (m+1)! \text{ – } \textbf{0,2 pts.}\right)\\
&= \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{m}\frac{(m+1)!}{(j+1)!(m-j)!}\\
& && \left(\text{Factorizar una constante – } \textbf{0,2 pts.}\right)\\
&= \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{m}\binom{m+1}{j+1} && \left(\text{Definición de } \tbinom{m+1}{j+1} \text{ – } \textbf{0,2 pts.}\right)\\
&= \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{j=1}^{m+1}\binom{m+1}{j} && \left(\text{Traslación de índices – } \textbf{0,3 pts.}\right)\\
&= \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\sum_{j=1}^{m+1}\binom{m+1}{j}+\binom{m+1}{0}-\binom{m+1}{0}\right)\\
& && \left(\text{Sumar y restar un término – } \textbf{0,2 pts.}\right)\\
&= \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\sum_{j=0}^{m+1}\binom{m+1}{j}-\binom{m+1}{0}\right)\\
& && \left(\text{Incluir el término sumado en la sumatoria – } \textbf{0,2 pts.}\right)\\
&= \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^{k}\left(\sum_{j=0}^{m+1}\binom{m+1}{j}1^{m+1-j}1^{j}-\binom{m+1}{0}\right)\\
& && \left(\text{Agregar potencias de 1 – } \textbf{0,2 pts.}\right)\\
&= \frac{1}{m+1}(1+1)^{n}\left((1+1)^{m+1}-\binom{m+1}{0}\right)\\
& && \left(\text{Binomio de Newton – } \textbf{0,5 pts.}\right)\\
&= \frac{1}{m+1}2^{n}\left(2^{m+1}-\binom{m+1}{0}\right) && (1+1=2)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{m+1} 2^n (2^{m+1} - 1) \qquad (\tbinom{m+1}{0} = 1 \text{ – } \mathbf{0{,}2\ pts.})$$
$$= \frac{2^n (2^{m+1} - 1)}{m+1}. \qquad \text{(Reordenar)}$$

P2. a) (3,0 pts.) Considere el conjunto

$$A = \{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3 \ \mid \ a + b + c = 5\}.$$

Demuestre que A es finito.

Solución:

Primera forma (Mostrando que está contenido en un conjunto finito):

Demostraremos que $A \subseteq \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}^3$ y argumentaremos que este último conjunto es finito.

Sea $(a, b, c) \in A$. En particular, tenemos que $a, b, c \in \mathbb{N}$, por lo que $a \geq 0$, $b \geq 0$ y $c \geq 0$. Además, tenemos que $a + b + c = 5$. Esto implica que $a \leq 5$. En efecto, si $a > 5$, como $b \geq 0$ y $c \geq 0$, concluimos que $a + b + c > 5$. De la misma forma, se puede mostrar que $b \leq 5$ y que $c \leq 5$.

Concluimos entonces que $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Por definición de producto cartesiano, esto muestra que $(a, b, c) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}^3$. Así, vemos que $A \subseteq \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}^3$ **(1,0 pts. por argumentar que $\boldsymbol{A \subseteq \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}^3}$)**.

Ahora, tenemos que $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}^3$ es finito porque es un producto cartesiano (finito) de conjuntos finitos **(1,0 pts. por argumentar que $\boldsymbol{\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}^3}$ es finito)**. Finalmente, como todo subconjunto de un conjunto finito es, a su vez, finito, concluimos que A es finito **(1,0 pts. por usar la propiedad de que un subconjunto de un conjunto finito también es finito)**.

Segunda forma (Calculando el cardinal del conjunto):

Es posible mostrar que $|A| = 21$ para mostrar que A es finito. Esto se puede hacer de la siguiente manera.

Sea $(a, b, c) \in A$. Primero es necesario notar como arriba que $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ **(0,7 pts. por argumentar que $\boldsymbol{a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}}$)**. Dado $a_0 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, sea

$$A_{a_0} = \{(a, b, c) \in A \ \mid \ a = a_0\},$$

es decir, el conjunto de elementos de A que tienen su primera coordenada igual a a_0. Si $(a_0, b, c) \in A$, la ecuación $a_0 + b + c = 5$ muestra que el menor valor que puede tomar b es 0 (cuando $c = 5 - a_0$), y que el mayor valor que puede tomar b es $5 - a_0$ (cuando $c = 0$). Además, el valor de b determina completamente el valor de c, ya que $c = 5 - a_0 - b$. Por lo tanto, tenemos que $b \in \{0, 1, 2, \ldots, 5 - a\}$, que es un conjunto que tiene cardinal $5 - a + 1$ **(0,7 pts. por argumentar que $\boldsymbol{b \in \{0, 1, 2, \ldots, 5 - a\}}$ y que b determina c)**. Como el valor de b determina completamente el valor de c, obtenemos obtenemos que

$$|A_{a_0}| = 5 - a_0 + 1.$$

(0,8 pts. por concluir que $\boldsymbol{|A_{a_0}| = 5 - a_0 + 1}$)

Finalmente, los conjuntos A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5 son disjuntos de a pares (porque tienen valores distintos de la primera coordenada), por lo que

$$\begin{aligned} |A| &= |A_0| + |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| \\ &= (5 - 0 + 1) + (5 - 1 + 1) + (5 - 2 + 1) + (5 - 3 + 1) + (5 - 4 + 1) + (5 - 5 + 1) \\ &= 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21. \end{aligned}$$

(0,8 pts. por encontrar el cardinal de $\boldsymbol{A}$)

Alternativamente, es posible observar qué números $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ pueden aparecer como 3-tuplas que suman 5, suponiendo que $a \leq b \leq c$, para luego tomar en cuenta el orden. Un análisis exhaustivo muestra que todas las posibilidades son:

$$(0,0,5),(0,1,4),(0,2,3),(1,1,3),(1,1,2)$$

(1,0 pts. por exhibir todas las 3-tuplas $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ con $a+b+c=5$ y $a \leq b \leq c$)
Tomando en cuenta ahora que importa el orden de las coordenadas, la primera tupla puede aparecer de 3 formas posibles, la segunda de 6 formas posibles, la tercera de 6 formas posibles, la cuarta de 3 formas posibles, y la quinta de 3 formas posibles **(1,0 pts. por decir cuántas veces puede aparecer cada tupla al tomar en cuenta el orden)**. Por lo tanto,

$$|A| = 3+6+6+3+3 = 21.$$

(1,0 pts. por encontrar el cardinal de A)

b) (3,0 pts.) Considere el conjunto

$$B = \{(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 \ \mid \ a+b+c=5\}.$$

Demuestre que B es numerable.
Indicación: Muestre separadamente que B es al menos numerable y que B es a lo más numerable.

Solución:
Para ver que B es al menos numerable, hay que demostrar que es infinito, es decir es, hay que exhibir infinitos elementos distintos de B. Esto se puede hacer de varias formas. Las siguientes son algunas opciones, pero existen muchas más (¡solo es necesario escribir una de estas listas y no todas estas!):

Fijando una coordenada como 0:

Fijando a y aumentando b:	$(0,5,0),(0,6,-1),(0,7,-2),(0,8,-3),(0,9,-4),\ldots$
Fijando b y aumentando a:	$(5,0,0),(6,0,-1),(7,0,-2),(8,0,-3),(9,0,-4),\ldots$
Fijando c y aumentando a:	$(5,0,0),(6,-1,0),(7,-2,0),(8,-3,0),(9,-4,0),\ldots$

Partiendo de $(a,b,c) \in B$ y sumando iterativamente algo que no cambie que $a+b+c=5$:

Partiendo de $(5,0,0)$ y sumando $(1,1,-2)$:	$(5,0,0),(6,1,-2),(7,2,-4),(8,3,-6),(9,4,-8),\ldots$
Partiendo de $(5,0,0)$ y sumando $(-1,-1,2)$:	$(5,0,0),(4,-1,2),(3,-2,4),(2,-3,6),(1,-4,8),\ldots$

Como los conjuntos numerables son los conjuntos infinitos más pequeños, concluimos de esta forma que $|B| \geq |\mathbb{N}|$.
(1,5 pts. por argumentar correctamente que B es infinito)

Para ver que B es a lo más numerable, basta mostrar que está contenido en un conjunto numerable. Por definición de B, tenemos que $B \subseteq \mathbb{Z}^3$, ya que los elementos de B son aquellos elementos de $\mathbb{Z}^3$ con una propiedad adicional **(0,3 pts. por decir que $B \subseteq \mathbb{Z}^3$)**. Por lo tanto, tenemos que $|B| \leq |\mathbb{Z}^3|$ **(0,3 pts. por decir que $|B| \leq |\mathbb{Z}^3|$)**. Como $\mathbb{Z}$ es numerable y un producto cartesiano (finito) de conjuntos numerables es, a su vez, numerable, concluimos que $|\mathbb{Z}^3| = |\mathbb{N}|$ **(0,5 pts. por decir que $|\mathbb{Z}^3| = |\mathbb{N}|$)**, lo que muestra que $|B| \leq |\mathbb{N}|$ **(0,4 pts. por obtener que $|B| \leq |\mathbb{N}|$)**. Concluimos finalmente que $|B| = |\mathbb{N}|$.

P3. Definimos la operación $+_{2,2}$ en $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ como

$$([a]_2,[b]_2) +_{2,2} ([c]_2,[d]_2) = ([a]_2 +_2 [c]_2, [b]_2 +_2 [d]_2).$$

Se tiene que $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +_{2,2})$ es un grupo (no lo demuestre), cuyo elemento neutro es $([0]_2,[0]_2)$.

a) (2,0 pts.) Demuestre que todo elemento de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ es su propio inverso para $+_{2,2}$. Es decir, demuestre que, para todo $([a]_2,[b]_2) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, se tiene que

$$([a]_2,[b]_2) +_{2,2} ([a]_2,[b]_2) = ([0]_2,[0]_2).$$

Solución:

Sea $([a]_2, [b]_2) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
([a]_2, [b]_2) +_{2,2} ([a]_2, [b]_2) &= ([a]_2 +_2 [a]_2, [b]_2 +_2 [b]_2) && \text{(Definición de } +_{2,2} \text{ – } \textbf{0,3 pts.}\text{)} \\
&= ([a+a]_2, [b+b]_2) && \text{(Definición de } +_2 \text{ – } \textbf{0,4 pts.}\text{)} \\
&= ([2a]_2, [2b]_2) && (a+a = 2a \text{ y } b+b = 2b \text{ – } \textbf{0,3 pts.})
\end{aligned}$$

Ahora, como $2a$ es divisible por 2, tenemos que el resto de la división de $2a$ por 2 es 0. Así, $[2a]_2 = [0]_2$. Similarmente, como $2b$ es divisible por 2, tenemos que el resto de la división de $2b$ por 2 es 0. Así, $[2b]_2 = [0]_2$ **(1,0 pts. por obtener que $[2a]_2 = [0]_2$ y que $[2b]_2 = [0]_2$)**. Concluimos que

$$([a]_2, [b]_2) +_{2,2} ([a]_2, [b]_2) = ([0]_2, [0]_2).$$

Alternativamente, es posible mostrar que $[2a]_2 = [0]_2$ y que $[2b]_2 = [0]_2$ usando la definición de la relación de equivalencia $\equiv_2$. En efecto, $2a \equiv_2 0$ por definición es verdadero si $2a - 0$ se escribe como "2 por un entero", lo que cierto porque $2a - 0 = 2a$ y a es entero. Similarmente, $2b \equiv_2 0$ es verdadero porque $2b - 0 = 2b$ se escribe como "2 por un entero" y b es entero **(1,0 pts. por obtener que $[2a]_2 = [0]_2$ y que $[2b]_2 = [0]_2$)**.

b) (2,0 pts) Demuestre que en el grupo $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ existe al menos un elemento que no es su propio inverso. Es decir, encuentre un elemento $[a]_4 \in \mathbb{Z}_4$ tal que

$$[a]_4 +_4 [a]_4 \neq [0]_4.$$

Solución:

Existen dos elementos de $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ que no son su propio inverso y basta mostrar que es verdadero para uno de ellos (y no necesariamente ambos).

El primer caso es $[1]_4 \in \mathbb{Z}_4$. Tenemos que $[1]_4 +_4 [1]_4 = [2]_4$ por definición de $+_4$ **(1,0 pts. por calcular $[1]_4 +_4 [1]_4$)**, y $[2]_4 \neq [0]_4$ porque el resto de la división de 2 por 4 es 2 y no 0 (alternativamente, porque $2 - 0 = 2$ no se escribe como "4 por un entero", así que $2 \not\equiv_4 0$) **(1,0 pts. por argumentar que $[2]_4 \neq [0]_4$)**.

El segundo caso es $[3]_4 \in \mathbb{Z}_4$. Tenemos que $[3]_4 +_4 [3]_4 = [6]_4$ por definición de $+_4$ **(1,0 pts. por calcular $[3]_4 +_4 [3]_4$)**, y $[6]_4 \neq [0]_4$ porque el resto de la división de 6 por 4 es 2 y no 0 (alternativamente, porque $6 - 0 = 6$ no se escribe como "4 por un entero", así que $6 \not\equiv_4 0$) **(1,0 pts. por argumentar que $[6]_4 \neq [0]_4$)**.

c) (2,0 pts.) ¿Son los grupos $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +_{2,2})$ y $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ isomorfos? Justifique usando las partes anteriores.

Solución:

Estos grupos no son isomorfos, porque hay una propiedad algebraica que un grupo cumple y el otro no. En efecto, en el grupo $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +_{2,2})$ todo elemento es su propio inverso, mientras que esto no ocurre en el grupo $(\mathbb{Z}_4, +_4)$.

Formalmente, supongamos por contradicción que $f\colon \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$ es un isomorfismo de $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +_{2,2})$ en $(\mathbb{Z}_4, +_4)$, entonces tendríamos que, para todo $([a]_2, [b]_2) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$,

$$f(([a]_2, [b]_2) +_{2,2} ([a]_2, [b]_2)) = f([a]_2, [b]_2) +_4 f([a]_2, [b]_2).$$

(0,5 pts. por enunciar la definición de homomorfismo)

Por la parte a), el término de la izquierda es igual a $f([0]_2, [0]_2) = [0]_4$ porque los homomorfismos mandan el neutro del primer grupo en el neutro del segundo grupo **(0,5 pts. por observar que**

$\boldsymbol{f([0]_2,[0]_2)=[0]_4}$). Concluimos entonces que

$$f([a]_2,[b]_2) +_4 f([a]_2,[b]_2) = [0]_4$$

para todo $([a]_2,[b]_2) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ **(0,5 pts. por concluir que $\boldsymbol{f([a]_2,[b]_2) +_4 f([a]_2,[b]_2) = [0]_4}$ para todo $\boldsymbol{([a]_2,[b]_2) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}$)**. Como f es biyectiva, en particular es epiyectiva, así que, para todo $[c]_4 \in \mathbb{Z}_4$ existe $([a]_2,[b]_2) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ tal que $f([a]_2,[b]_2) = [c]_4$. Vemos entonces que $[c]_4 +_4 [c]_4 = [0]_4$ para todo $[c]_4 \in \mathbb{Z}_4$, lo que contradice la parte b) **(0,5 pts. por usar la epiyectividad para encontrar una contradicción con la parte b))**.

Duración: 3h.