P1

•) $\sum_{n=3}^{\infty} 1/n\ln(\ln(n))$:

usamos el criterio de integridad:

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x\ln(\ln(x))}$$

usamos un cambio de variable:

$$u=\ln(x) \;;\; du=\frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \int_{\ln(3)}^{\infty} \frac{du}{\ln(u)} \geq \int_{\ln(3)}^{\infty} \frac{du}{u} > \infty$$

ya que: $0 < \ln(u) \leq u \Rightarrow 1/u \leq 1/\ln(u)$

entonces la integral diverge, por consecuencia la serie divergerá.

•) $\sum_{n=1}^{\infty} 1+\sqrt{n}/(1+n)^3-1 = a_n$, usamos el criterio del cociente:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} \;,\; b_n = 1/n^{5/2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}}{(n+1)^3-1} + \frac{n^{1/2}\, n^{5/2}}{(n+1)^3-1} = 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ se comportan igual,

como $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge.

•) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\arctan\left(\underbrace{1/2n+1}_{\text{decreciente}}\right)}_{\text{decreciente continua}}$

Recordemos el criterio de Leibniz: para series del estilo $\sum_{k \geq n_0} (-1)^n a_n$ es decreciente tal que $a_n \to 0$, entonces $\sum_{k \geq n_0} (-1)^n a_n$ converge.

$\Rightarrow$ por la definición del criterio la serie converge.

•) $\sum_{n=1}^{\infty} (n!)^2 / (2n)!$, aplicamos el criterio de D'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}$$

aplicando el límite tenemos:

$$= 1/4 < 1 \Rightarrow \text{converge.}$$

•) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$: usamos el criterio raíz enesima:

$$\lim (a_n)^{1/n} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}\right)^{1/n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{-(n+2)^{-1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{2}$$

$$= \exp(-1) < 1 \Rightarrow \text{converge.}$$

•) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n^2}/n!$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!}}{\frac{2^{n^2}}{n!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n+1}}{n+1} = \infty > 1$$

por lo tanto diverge.

P2

•) Supongamos que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ converge:

pdq: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

observemos que $a_k \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$, entonces sucesión:

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} a_k$$

es creciente.

Con S_n creciente probaremos convergencia viendo acotación superiormente.

Entonces notamos que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, \infty) \Rightarrow$

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) \text{ es creciente}$$

Como la integral converge, entonces Φ está acotada por su asíntota horizontal.

$$\Phi(x) \leq \lim_{x \to \infty} \Phi(x) \int_a^{\infty} f(t)\,dt, \forall x \in [a, \infty)$$

Por hipótesis:

$$\int_a^{\infty} f(t)\,dt \geq \int_a^{n \cdot a} f(t)\,dt \geq \sum_{k=1}^{n-1} a_k = S_{N-1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

así $(S_N)_N$ está acotada superiormente por $L = \int_a^{\infty} f(t)\,dt \in \mathbb{R}$ por lo tanto converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge. $\square$

•) Como vemos divergencia, entonces es análogo a la parte anterior pero con la contrarecíproca:

Sea $\sum_{k=1}^{a} a_k$ convergente, pdq: $\int_{e}^{\infty} f(x)\,dx$ diverge.

Sabemos que:
$$\int_{a}^{n\cdot a} f(t)\,dt \geq \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

tomando $n = \infty$:
$$\int_{a}^{\infty} f(t)\,dt \geq \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty - 1 \to \infty} a_k}_{\text{diverge}}$$

acotando la integral inferiormente por una divergente, entonces: $\int_{e}^{\infty} f(t)\,dt$ diverge.

$\square$