MA1002-5 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Álvaro Hernández
Auxiliar: Luciano Avegno Cepeda

Auxiliar 12: Integrales Impropias

Definición 1 (Integral Impropia de Primera Especie (Intervalo no Acotado))**.** *Sea* $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *diremos que* f *es integrable en* $[a, +\infty)$ *si se cumple que:*

1. $\forall x \in (a, +\infty), f$ *es integrable en* $[a, x]$.
2. *Existe el límite definido por:*

$$lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$$

Notación 1. *Si una función es integrable en el intervalo* $[a, \infty)$ *entonces al valor del límite se le llama integral impropia de primera especie de* f *y se le denota:*

$$\int_a^{+\infty} f = lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$$

Definición 2 (Integral Impropia de Segunda Especie (Funciones no Acotadas))**.** *Sea* $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ *una función no acotada, diremos que* f *es integrable en* $[a, b)$ *si y solo si:*

1. $\forall x \in (a, b), f$ *es integrable en* $[a, x]$
2. *El límite* $lim_{x\to b^-} \int_a^x f$ *existe.*

Definición 3 (Integrales Impropias de Tercera Especie o Mixtas)**.** *Son las que se obtienen combinando integrales impropias de primera y segunda especie. Por ejemplo:*

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0^-} \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

Este tipo de integral será convergente si y solo si cada una de sus componentes es una integral convergente.

Teorema 1 (Criterio de Comparación)**.** *Sean* f *y* g *funciones continuas en* $[a, +\infty)$ *tales que:*

$$(\exists b \geq a)(\forall x \geq b), 0 \leq f(x) \leq g(x)$$

entonces si $\int_a^{+\infty} g$ *converge entonces* $\int_a^{+\infty} f$ *converge. Recíprocamente si* $\int_a^{+\infty} f$ *diverge, entonces* $\int_a^{+\infty} g$ *diverge.*

Teorema 2 (Criterio del Cuociente de Funciones)**.** *Sean* f *y* g *funciones continuas en* $[a, +\infty)$ *y no negativas en* $[b, +\infty)$*, donde* $b \geq a$ *y tales que:*

$$lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$$

Entonces las integrales impropias $\int_a^{+\infty} f$ *y* $\int_a^{+\infty} g$ *son ambas convergentes o ambas divergentes.*

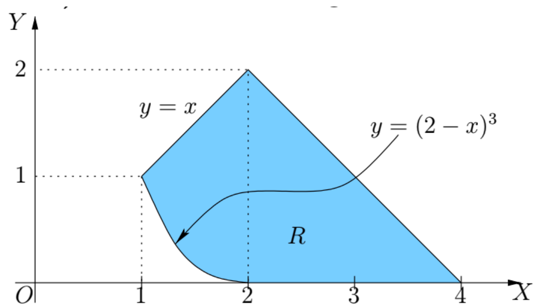
Definición 4 (Convergencia Absoluta)**.** *Sea* $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$*, diremos que* $\int_a^{+\infty} f$ *es absolutamente convergente si* $\int_a^{\infty} |f|$ *converge.*

Teorema 3. *Sea* $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$*,se tiene que:*

$$\int_a^{+\infty} f \text{ converge absolutamente} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ converge}$$

1. Sea $f(x) = 6 + 4x - 2x^2$ y $g(x) = \frac{6-2x}{6x+1}$
   - Calcular el área de la región R encerrada entre ambas curvas para $x \geq 0$
   - Calcular el volumen del sólido que se forma al rotar la región R en torno al eje OY.
2. Considerando la región R de la figura:
   - Calcule el área de la región R.
   - Calcule el volumen del sólido de revolución generado por la rotación de R entorno al eje OY

- Calcule el área del manto (total) del sólido de revolución generado por la rotación de R en torno al eje OX.



3. Estudie el siguiente límite:

$$lim_{x\to+\infty} e^{-x^4} \int_0^{x^2} e^{t^2} dt$$

4. Determine si la siguiente integral impropia es o no convergente y de converger calcúlela.

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

5. Estudie la convergencia de las siguientes integrales impropias:

- $$\int_1^\infty \frac{ln(x)}{x^3} dx$$

- $$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt[3]{x}(2x+3)} dx$$