Teorema Fundamental del Cálculo y Propiedades de Integrales

Semana 9

Luciano Avegno Cepeda,

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

11 de octubre de 2022

Recordemos a Riemann 1/3

Definición (Sumas Superiores e Inferiores)

Sea f una función definida y acotada en $[a, b]^1$. Sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Como f es acotada en $[a, b]$ también lo es en cada intervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i] \forall i = 1, ..., n$ luego podemos definir:

$$m_i(f) = inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$M_i(f) = sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Con esto se definen las siguientes sumas:

1. $S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1})$ se llama suma superior de f correspondiente a la partición P.
2. $s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1})$ se llama suma inferior de f correspondiente a la partición P.

Recordemos a Riemann 2/3

Definición (Integrales Superiores e Inferiores)

Sea $\mathcal{P}_{[a,b]}$ el conjunto de todas las particiones de $[a,b]$. Sea f una función definida y acotada sobre $[a,b]$. Los números reales:

$$\int_{-a}^{b} = sup\{s(f,P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}$$

$$\int_{a}^{-b} f = inf\{S(f,P) : P \in \mathcal{P}_{[a,b]}\}$$

Se llama integral inferior de f en $[a,b]$ e integral superior de f en $[a,b]$ respectivamente

Definición (Refinamiento de una Partición o Partición Más Fina)

Sean P y Q dos particiones de $[a,b]$ si $P \subseteq Q$ diremos que Q es un refinamiento P o una partición más fina que P.

Recordemos a Riemann 3/3

Teorema (Condición de Riemann)

Una función f definida y acotada en un intervalo $[a, b]$ es Riemann-integrable en $[a, b]$ si y solo si:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists P \in \mathcal{P}_{[a,b]}) S(f, P) s(f, P) < \epsilon \quad (1)$$

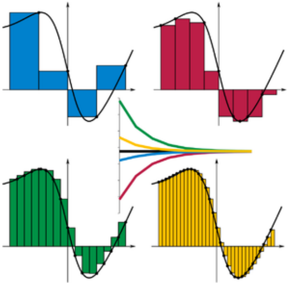


Figura 1:

Repaso Semana 8

Proposición

Si f es una función definida, acotada y monótona en $[a, b]$, entonces es integrable en $[a, b]$

Teorema

Si f es una función continua en $[a, b]$ entonces es integrable en $[a, b]$

Definición

Sea f una función integrable en un intervalo $[p, q]$. Si $a, b \in [p, q]$ son tales que $a \geq b$ entonces se define la integral de a a b del modo siguiente:

$$\int_a^b f = -\int_b^a f, \text{ si } a > b, o$$

$$\int_a^b f = 0 \text{ si } a = b$$

Primer Teorema Fundamental del Cálculo

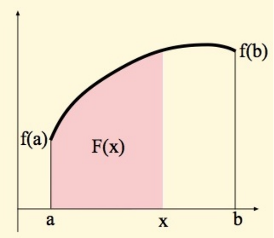
Teorema (Primer Teorema Fundamental del Cálculo)

Si f es una función continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in I$ entonces la función G está definida por:

$$G(x) = \int_a^x f$$

Es derivable en $int(I)$ y además $G' = f$ en $int(I)$.

Esto nos garantiza que toda función continua en un intervalo posee primitivas.



Consecuencias del Primer Teorema Fundamental del Cálculo

Corolario

Si la función F es continua en I, es una primitiva f en I, entonces:

$$\forall a, b \in I, \int_a^b = F(b) - F(a)$$

Veamos algunos ejemplos:

1. $\int_0^\pi cos(x)dx = sen(\pi) - sen(0) = 0 - 0 = 0$
2. $\int_0^\pi sen(x)dx = -cos(\pi) - (cos(0)) = -(-1) - (-1) = 2$
3. $\int_1^e \frac{1}{x}dx = ln(e) - ln(1) = 1 - 0 = 1$

Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo)

Sea f integrable en $[a,b]$. Si existe una función F continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $F' = f$ en (a,b), entonces:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Se nota bien que esto es una generalización más amplia del corolario anterior, por lo que los ejemplos anteriores aplican.

Ejercicios

1. Usando sumas de Riemann de alguna función apropiada exprese como integral el siguiente límite y luego calcule la integral:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}ln(n+i)-ln(n)$$

2. Calcular la siguiente integral:

$$\int_0^1 xarcsin(x)dx$$

3. Sea f una función continua y sean G y F las funciones definidas por: $F(x) = \int_0^x f(t)dt, G(x) = \int_0^x f(t^2)dt$. Demuestre que:

$$\int_0^m G(x)dx = mG(m) - \frac{1}{2}F(m^2)$$