Guía Cálculo de una variable, Problemas de la Semana 3:

Problema 1:Sean f, g : $\mathrm{R} \to \mathrm{R}$ que cumplen lo siguiente:

a) $g(x) = xf(x) + 1$ y $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ b) $g(a+b) = g(a)g(b)$

Demuestre que $g'(x) = g(x)$

Solución:

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(x)g(h) - g(x)}{h} = g(x) \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - 1}{h}$$
$$= g(x) \lim_{h \to 0} \frac{hf(h)}{h} = g(x) \lim_{h \to 0} f(h) = g(x)$$

Problema 2: Sea $c > 1$. Probar que $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ es derivable en 0 si y solamente si existe el límite $L = \lim_{x \to 0} [f(cx) - f(x)]/x$. Notar que $f'(0) = L/(c-1)$.

Desarrollo:

Notamos que tenemos un si solamente si, por lo tanto para esta demostración lo separaremos en dos implicancias.

- $\boxed{\Rightarrow}$ Tenemos que $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ existe, esto es por la definición de ser derivable en 0.

  Y además (tomando la forma de L) podemos decir que $\frac{c}{c} \lim_{x \to 0} \frac{f(cx) - f(0)}{x} = c \lim_{x \to 0} \frac{f(cx) - f(0)}{cx} = cf'(0)$

  (Esto ocurre haciendo un "cambio de variable tomando $x = cx$)

  Ahora nos falta ver que el límite L existe,

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{f(cx) - f(x)}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{f(cx) - f(x) + f(0) - f(0)}{x}\\ &= \lim_{x \to 0} \frac{f(cx) - f(0)}{x} - \frac{(f(x) - f(0))}{x}\\ &= cf'(0) - f'(0)\\ &= (c-1)f'(0)\end{aligned}$$

  Entonces L existe cuando f'(0) existe.

- $\boxed{\Leftarrow}$ Ahora, supondremos que $f(0) = 0$ y que además $\lim_{x \to 0} \frac{f(cx) - f(x)}{x} = 0$. Ahora, tomaremos un $\epsilon > 0$ y como $\lim_{x \to 0} \left|\frac{f(cx) - f(x)}{x}\right| = 0$ para $\epsilon\frac{c-1}{c} > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in [-\delta, \delta]$ se tiene,

$$\frac{|f(x) - f(x/c)|}{|x|} \leqslant \epsilon\frac{c-1}{c} \Rightarrow |f(x) - f(x/c)| \leqslant \epsilon\frac{c-1}{c}|x|$$

  Reemplazando x por x/c^k tenemos que para todo $x \in \left[-c^k\delta, c^k\delta\right]$:

$$\left|f\left(x/c^k\right) - f\left(x/c^{k+1}\right)\right| \leqslant \frac{\epsilon\frac{c-1}{c}}{c^k}|x|$$

  Notemos además que $f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x/c^k\right) - f\left(x/c^{k+1}\right)\right) + f\left(x/c^n\right)$, tomando valor absoluto a esta igualdad tenemos que para todo $x \in [-\delta, \delta]$:

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \left|\left(\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x/c^k\right) - f\left(x/c^{k+1}\right)\right) + f\left(x/c^n\right)\right| \qquad /\,\text{Desigualdad triangular}\\ &\leqslant \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\left|f\left(x/c^k\right) - f\left(x/c^{k+1}\right)\right|}_{\leqslant \frac{\epsilon\frac{c-1}{c}}{c^k}|x|} + \left|f\left(x/c^n\right)\right|\\ &\leqslant \epsilon\frac{c-1}{c}|x|\Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{c^k}}_{\text{Geométrica}}\Big) + \left|f\left(x/c^n\right)\right|\\ &\leqslant \epsilon\frac{c-1}{c}|x|\frac{c^{-n} - 1}{c^{-1} - 1} + \left|f\left(x/c^n\right)\right|\end{aligned}$$

  Tomando límite a esta última desigualdad y ocupando la continuidad de f en 0 tenemos que para $x \in [-\delta, \delta]$:

$$|f(x)| \leqslant \lim_{n \to \infty} \epsilon\frac{c-1}{c}|x|\frac{c^{-n} - 1}{c^{-1} - 1} + \left|f\left(x/c^n\right)\right| = \epsilon\frac{c-1}{c}|x|\frac{c}{c-1} + |f(0)| = \epsilon|x|$$

  Concluimos entonces que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ (el anterior) tal que para $x \in [-\delta, \delta]$:

$$\frac{|f(x)|}{|x|} \leqslant \epsilon \Rightarrow \left|\frac{f(x) - f(0)}{x} - 0\right| \leqslant \epsilon$$

  Es decir $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$ y por tanto f es derivable en 0. Ahora nos queda deshacernos de los supuestos que se hicieron en un comienzo.

  Si no se cumplieran los supuestos, definimos $g(x) = f(x) - \frac{L}{c-1}x - f(0)$, notemos que g es continua en 0, $g(0) = 0$, y que:

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0} \frac{g(cx) - g(x)}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{f(cx) - \frac{Lc}{c-1}x - f(0) - \left(f(x) - \frac{L}{c-1}x - f(0)\right)}{x}\\ &= \lim_{x \to 0} \frac{f(cx) - f(x) + \frac{L}{c-1}x - \frac{Lc}{c-1}x}{x}\\ &= \lim_{x \to 0} \frac{f(cx) - f(x)}{x} + \lim_{x \to 0} \frac{\frac{L}{c-1}x - \frac{Lc}{c-1}x}{x}\\ &= L + \frac{L}{c-1}(1-c) = L - L = 0\end{aligned}$$

  Luego podemos aplicar lo que habíamos demostrado anteriormente en g para concluir que g es derivable en 0. Por último como $f(x) = g(x) + \frac{L}{c-1}x + f(0)$ por álgebra de derivadas tenemos que f es derivable en 0.

Problema 3:

Sea f: $\mathrm{R} \to \mathrm{R}$ derivable tal que $f' = af(x)\ \forall x \in \mathrm{R}$, con a constante. Demostrar que $f(x) = f(0)e^{ax}$.
Indicacion: considere $g(x) = e^{-ax}f(x)$.

Solución:

Podemos partir notando que $g(x)$ es derivable, ya que la funcion e^{-ax} y la funcion $f(x)$ son derivables en todo su dominio. Entonces, por álgebra de derivadas tenemos:

$$\begin{aligned}g'(x) = \left(e^{-ax}f(x)\right)' &= -ae^{-ax}f(x) + e^{-ax}f'(x)\\ &= e^{-ax}(-af(x) + f'(x))\\ &= e^{-ax}(-af(x) + af(x))\\ &= e^{-ax} \cdot 0\\ &= 0\end{aligned}$$

Esto implica que $g(x)$ es una funcion constante, ya que la derivada de una constante es 0.
$\Rightarrow$ $f(x)$ es constante, tal que $f(x) = 0$
$\Rightarrow$ $f(x) = f(0)$ (al ser f constante)
$\Rightarrow$ $f(x) = e^{ax}f(0)$ (ya que al ser f la funcion constante igual a 0, al multiplicarla por cualquier cosa queda igual).

Problema 5: Sea $g: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ dos veceses derivables con $g' \neq 0$ en todo R y $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ definida por $f(x) = \cos(Kg(x))$. Muestre que:

$$f'' - f'\frac{g''}{g'} + (Kg')^2 f = 0$$

Dem:
Observemos que:

$$\begin{aligned}f' &= \cos'(Kg(x)) \cdot (Kg(x))'\\ &= -\sin(Kg(x)) \cdot (K'g(x) + Kg'(x))\\ &= -\sin(Kg(x)) \cdot Kg'(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'' &= [-\sin(Kg(x)) \cdot Kg'(x)]'\\ &= [-\sin(Kg(x))]' \cdot [Kg'(x)] + [-\sin(Kg(x))] \cdot [Kg'(x)]'\\ &= -\sin'(Kg(x)) \cdot Kg'(x)) - \sin(Kg(x)) \cdot Kg''(x)\\ &= -\cos(Kg(x)) \cdot K^2 g'^2(x) - \sin(Kg(x)) \cdot Kg''(x)\end{aligned}$$

Remplazando en la ecuación:

$$f'' - f'\frac{g''}{g'} + (Kg')^2 f$$
$$= \left[-\cos(Kg(x)) \cdot K^2 g'^2(x) - \sin(Kg(x)) \cdot Kg''(x)\right] - \left[(-\sin(Kg(x)) \cdot Kg'(x)) \cdot \frac{g''(x)}{g'(x)}\right] + (Kg'(x))^2 \cdot \cos(Kg(x))$$

$$= -\cos(Kg(x)) \cdot K^2 g'^2(x) - \sin(Kg(x)) \cdot Kg''(x) + \sin(Kg(x)) \cdot Kg''(x) + \cos(Kg(x)) \cdot K^2 g'^2(x)$$
$$= 0$$

Por lo tanto:

$$f'' - f'\frac{g''}{g'} + (Kg')^2 f = 0$$

Problema 6: Sea f derivable en x_0, calcular:

$$\lim_h \to 0 \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 + \beta h)}{h}$$

Desarrollo:

Por enunciado sabemos que existe el siguiente limite : $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

ya que f es derivable en x_0 y que es continua en x_0

$$\begin{aligned}&\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 + \beta h)}{h} = \text{ hacemos un ni quita ni pone de } -f(Xo) + f(Xo)\\ &\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0) - (f(x_0 + \beta h) - f(x_0))}{h} = \text{separamos la fraccion en 2 limites}\\ &\lim_{h \to 0} \frac{(f(x_0 + \alpha h) - f(x_0))}{\alpha h} - \lim_{h \to 0} \frac{(f(x_0 + \beta h) - f(x_0))}{\beta h} = \text{ aplicamos un cambio de variable en ambos limites, } u = \alpha h \text{ y } v = \beta h\\ &\lim_{\alpha h \to 0} \frac{(f(x_0 + u) - f(x_0))}{\frac{u}{\alpha}} - \lim_{\beta h \to 0} \frac{(f(x_0 + v) - f(x_0))}{\frac{v}{\beta}} = \text{reeescribimos para hacer aparecer la derivada conocida } f'(x_0)\\ &\lim_{\alpha h \to 0} \frac{\alpha(f(x_0 + u) - f(x_0))}{u} - \lim_{\beta h \to 0} \frac{\beta(f(x_0 + v) - f(x_0))}{v} = \text{ por enunciado tenemos } f'(x_0)\\ &\alpha \lim_{\alpha h \to 0} \frac{(f(x_0 + u) - f(x_0))}{u} - \beta \lim_{\beta h \to 0} \frac{(f(x_0 + v) + f(x_0))}{v} = \alpha f'(Xo) - \beta f'(Xo)\\ &\alpha f'(x_0) - \beta f'(x_0) = f'(x_0)(\alpha - \beta)\end{aligned}$$

Problema 7: Sea $f: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ una función tal que

$$|f(x) - f(y)| \leqslant a(x-y)^2\ \forall x, y \in \mathrm{R}$$

con $a \geqslant 0$. Pruebe que $f': \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ existe y $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathrm{R}$.

<u>Desarrollo:</u>
Sea $x \neq y;\ x,\ y \in \mathrm{R}$

Notemos que $|f(x) - f(y)| \leqslant a(x-y)^2 \ // \ \div|x-y|$

$$\Rightarrow \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leqslant a(x-y) \Rightarrow \left|\frac{f(x) - f(y)}{x-y}\right| \leqslant a(x-y)$$

Si $x \to y$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x) - f(y)}{x-y}\right| \leqslant 0 \Rightarrow 0 \leqslant \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \leqslant 0$$

Siguiendo, por sandwich $\lim_{x \to y} \frac{f(x) - f(y)}{x-y} = 0 = f'(y)$

Asi, f' existe y $f'(y) = 0$ para todo $y \in \mathrm{R}$, como y es arbitrario, sin perdida de generalidad se asume que $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathrm{R}$.