Problemas Sección 3.4 Cálculo de una variable, Stewart sección 3.4

Obtenga la derivada de cada una de las siguientes funciones.

21.

$$y = \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^3$$

Desarrollo:

Notar que y es diferenciable, por ser suma, division y multiplicacion de funciones derivables (álgebra de derivadas), además, $\mathrm{Dom}(f) = R \setminus \{-1, 1\}$, asi y es diferenciable en todo su dominio.

$$y' = 3\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)' = 3\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2 \cdot \frac{(x^2+1)'(x^2-1) - (x^2-1)'(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$$

$$= 3\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2 \cdot \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = 3\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2 \cdot \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$= 3\,\frac{(x^2+1)^2}{(x^2-1)^2} \cdot \frac{-4x}{(x^2-1)^2} = \frac{-12x\,(x^2+1)^2}{(x^2-1)^4}$$

Luego $y' = \dfrac{-12x\,(x^2+1)^2}{(x^2-1)^4}$

22.

23.

$$y = \sqrt{1+2e^{3x}}$$

Desarrollo:

Notar que la función y es una composición de las funciones f y g donde

$$f(x) = 1 + 2e^{3x} \ \text{ y } \ g(x) = \sqrt{f(x)}$$

(f y g son continuas, f es derivable en R como composición y suma de funciones derivables en R. Notemos que $\forall x \in R,\ f(x) > 0$.

Entonces g es derivable en R como composición con $f : R \to R^+$, derivable en R)

Sea $h(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = (h \circ f)(x)$

Para ello usando la regla de la cadena, tenemos:

$$g'(x) = (h \circ f)'(x) = h'(f(x)) \cdot f'(x).$$

$$\text{Vemos que } h'(f(x)) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2\sqrt{1+2e^{3x}}}$$

Como f es derivable como suma de funciones derivables en R:

$$\left(1 = f_1(x),\ 2e^{3x} = f_2(x) \text{ y } f(x) = f_1(x) + f_2(x)\right)$$

su derivada es la suma de derivadas, es decir:

$$f_1'(x) + f_2'(x).$$

$$f_1'(x) = 0 \ \wedge\ f_2'(x) = 2 \cdot 3e^{3x} = 6e^{3x} \Rightarrow f'(x) = 6e^{3x}$$

Con ello:

$$g'(x) = (h \circ f)'(x) = h'(f(x)) \cdot f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+2e^{3x}}} \cdot 6e^{3x} = \frac{3e^{3x}}{\sqrt{1+2e^{3x}}}$$

26.

$$G(y) = \frac{(y-1)^4}{(y^2+2y)^5}$$

Primero, por álgebra de derivadas, en concreto, la derivada de una división de funciones:

$$G(y)' = \frac{(y-1)^{4\prime} \cdot (y^2+2y)^5 - \left((y^2+2y)^5\right)' \cdot (y-1)^4}{\left((y^2+2y)^5\right)^2}$$

$$\Rightarrow G(y)' = \frac{(y-1)^{4\prime} \cdot (y^2+2y)^5 - \left((y^2+2y)^5\right)' \cdot (y-1)^4}{(y^2+2y)^{10}}$$

Y en particular, la derivada de cada función es:

- $(y-1)^{4\prime} = 4(y-1)^3$
- $\left((y^2+2y)^5\right)' = 5\,(2y+2)(y^2+2y)^4 = (10\,(x+1))\left(x^4(x+2)^4\right)$

$\Rightarrow \left((y^2+2y)^5\right)' = 10x^5 + 10x^4(x+2)^4$

Aplicandose en ambas la derivada de una potencia $\left(x^n = n * x^{n-1}\right)$, a consecuencia de la regla de la cadena.

Luego, reemplazando en la derivada de una división de funciones, las derivadas de cada función, tenemos:

$$G(y)' = \frac{4(y-1)^3 \cdot (y^2+2y)^5 - 5\,(2y+2)(y^2+2y)^4 \cdot (y-1)^4}{(y^2+2y)^{10}} = \frac{2(y-1)^3\left(-3y^2+4y+5\right)}{y^6(y+2)^6}$$

□

29.

$$F(t) = e^{t\sin(2t)}$$

Por regla de la cadena pag 27 del apunte

$$F'(t) = e^{t\sin(2t)}(t\sin(2t))'$$

Por algebra de derivadas pag 25 del apunte

$$F'(t) = e^{t\sin(2t)}(\sin(2t) + t(\sin(2t))')$$

Por regla de la cadena pag 27 del apunte

$$F'(t) = e^{t\sin(2t)}(\sin(2t) + 2t\cos(2t))$$

30.

$$F(v) = \left(\frac{v}{v^3+1}\right)^6$$

Solución:

$$F'(v) = \left(\left(\frac{v}{v^3+1}\right)^6\right)' = \left(\frac{v^6}{(v^3+1)^6}\right)' = \frac{(v^6)'(v^3+1)^6 - v^6\left((v^3+1)^6\right)'}{\left((v^3+1)^6\right)^2} =$$

$$\frac{6v^5(v^3+1)^6 - v^6\left(6(v^3+1)^5(v^3+1)'\right)}{(v^3+1)^{12}} = \frac{6v^5(v^3+1)^6 - 18v^8(v^3+1)^5}{(v^3+1)^{12}} =$$

$$\frac{6v^5(v^3+1)^5\left((v^3+1) - 3v^3\right)}{(v^3+1)^{12}} = \frac{6v^5(1-2v^3)}{(v^3+1)^7} = \frac{6v^5 - 12v^8}{(v^3+1)^7} \ ∎$$

31.

$$y = \sin(\tan 2x)$$

Para obtener la derivada de la función $y = \sin(\tan 2x)$ debemos aplicar la regla de la cadena, quedando de la siguiente manera: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{du}(\sin(u))\dfrac{d}{dx}(\tan(2x))$, con $u = \tan(2x)$.

Desarrollando queda:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{du}(\sin(u))\frac{d}{dx}(\tan(2x))\frac{d}{dx}(2x)$$

$$= \cos(u))\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin}{\cos}\right)(2x)2$$

$$= \cos(\tan(2x))\left(\frac{\sin'(2x)\cos(2x) - \sin(2x)\cos'(2x))}{\cos^2(2x)}\right)2$$

$$= \cos(\tan(2x))*\left(\frac{\cos(2x)\cos(2x) + \sin(2x)\sin(2x)}{\cos^2(2x)}\right)2$$

$$= \cos(\tan(2x))*\left(\frac{\cos(2x)^2 + \sin(2x)^2}{\cos^2(2x)}\right)2$$

$$= 2\cos(\tan(2x))*\left(\frac{1}{\cos^2(2x)}\right)$$

$$= 2\cos(\tan(2x))\sec^2(2x)$$

Donde ocupamos la regla de la cadena, álgebra de derivadas, trigonometría, y derivadas conocidas como: $\sin'(2x) = \cos(2x)$, $\cos'(2x) = -\sin(2x)$, $\dfrac{d}{dx}(2x) = 2$.

Finalmente la derivada de $y = \sin(\tan(2x))$ es igual a $y' = 2\cos(\tan(2x))\sec^2(2x)$.

32.

$$y = \sec^2(m\theta)$$

Desarrollo

Asumiendo que θ es la variable y m es la constante, la derivada de la función está dada por la siguiente forma:

$$y' = 2\sec(m\theta)\frac{d}{d\theta}[\sec(m\theta)]$$

$$y' = 2\sec(m\theta)\sec(m\theta)\tan(m\theta)\frac{d}{d\theta}(m\theta)$$

$$y' = 2\tan(m\theta)\sec^2(m\theta)m$$

$$y' = 2m\sec^2(m\theta)\tan(m\theta)$$

34.

$$y(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x}}$$

Para facilitar el cálculo, llamaremos la función $f(x) = x^2$ y $g(x) = e^{-\frac{1}{x}}$. Luego por álgebra de derivadas sabemos que la derivada entre dos funciones que se están multiplicando, es de la forma

$(fg)' = f'g + fg'$ por lo tanto al reemplazar obtenemos lo siguiente:

$$y'(x) = (2x)\left(e^{-\frac{1}{x}}\right) + (x^2)\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)\left(\frac{1}{x^2}\right) = 2xe^{-\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}$$

35.

$$y = \cos\left(\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)$$

Desarrollo

$$\Rightarrow y' = \cos'\left(\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)$$

$$\Rightarrow y' = -\sin\left(\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}\right) \cdot \frac{(1-e^{2x})' \cdot (1+e^{2x}) - (1-e^{2x}) \cdot (1+e^{2x})'}{(1+e^{2x})^2}$$

$$\Rightarrow y' = -\sin\left(\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}\right) \cdot \frac{-2e^{2x} \cdot (1+e^{2x}) - (1-e^{2x}) \cdot 2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$$

$$\Rightarrow y' = -\sin\left(\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}\right) \cdot \frac{-2e^{2x} - 2e^{2x} \cdot e^{2x} - 2e^{2x} + 2e^{2x} \cdot e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$$

$$\Rightarrow y' = -\sin\left(\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}\right) \cdot \frac{-4e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{4e^{2x}\sin\left(\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}\right)}{(1+e^{2x})^2}$$

36.

$$y = \sqrt{1+xe^{-2x}}$$

Resolución

$$y' = \left((1+xe^{-2x})^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(1+xe^{-2x})^{-\frac{1}{2}}(1+xe^{-2x})'$$

$$= \frac{1}{2}(1+xe^{-2x})^{-\frac{1}{2}}(xe^{-2x})'$$

$$= \frac{1}{2}(1+xe^{-2x})^{-\frac{1}{2}}(x'e^{-2x} - xe^{-2x\prime})$$

$$= \frac{1}{2}(1+xe^{-2x})^{-\frac{1}{2}}(x'e^{-2x} - xe^{-2x}(-2x)')$$

$$= \frac{1}{2}(1+xe^{-2x})^{-\frac{1}{2}}(e^{-2x} - 2xe^{-2x})$$

$$= \frac{1}{2}(1+xe^{-2x})^{-\frac{1}{2}}(1-2x)e^{-2x}$$

$$= \frac{1-2x}{2e^{2x}\sqrt{1+xe^{-2x}}}$$

37.

38. Obtener la derivada de:

$$y = e^{k\tan\sqrt{x}}$$

$$y = e^{k\tan\sqrt{x}} \Rightarrow y' = \left(e^{k\tan\sqrt{x}}\right)' \Rightarrow y' = e^{k\tan\sqrt{x}}\left(k\tan\sqrt{x}\right)' \Rightarrow \text{(por Regla de la Cadena)}$$

$$\Rightarrow y' = e^{k\tan\sqrt{x}}\left(\frac{k}{\cos^2\left(\sqrt{x}\right)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \Leftrightarrow y' = \frac{k \cdot e^{k\tan\sqrt{x}}}{2\cos^2\left(\sqrt{x}\right)\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{k \cdot e^{k\tan\sqrt{x}} \cdot \sec^2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

39.

Obtenga la derivada de la siguiente función $f(x) = \tan\left(e^x\right) + e^{\tan(x)}$

Respuesta:

Antes de comenzar, definiremos funciones auxiliares que nos ayudarán con la resolución del problema.

$g(x) = \tan\left(e^x\right)$ $\qquad h(x) = e^{\tan(x)}$

Ahora, notamos que nos piden la derivada de la suma de las funciones auxiliares que definimos recién, y sabemos que por álgebra de derivadas la solución de este problema será la suma de la derivada de las funciones.

Vemos que $g(x)$ y $h(x)$ son funciones que están compuestas. Por lo tanto, para encontrar su derivada será necesario utilizar regla de la cadena.

Volveremos a utilizar funciones auxiliares para facilitar la comprensión del desarrollo.

- $g(x) = \tan\left(e^x\right)$
  $\Rightarrow j(x) = \tan(x) \quad m(x) = e^x$
  $\Rightarrow j(m(x)) = \tan\left(e^x\right)$
  $\Rightarrow j'(x) = \sec^2(x) \quad m'(x) = e^x$
  Entonces, por regla de la cadena obtendremos que,
  $g'(x) = j'(m(x)) \cdot m'(x) = \sec^2\left(e^x\right) \cdot e^x$

- $h(x) = e^{\tan(x)}$
  $\Rightarrow o(x) = e^x \quad p(x) = \tan(x)$
  $\Rightarrow o(p(x)) = e^{\tan(x)}$
  $\Rightarrow o'(x) = e^x \quad p'(x) = \sec^2(x)$
  Entonces, por regla de la cadena obtendremos que,
  $h'(x) = o'(p(x)) \cdot p'(x) = e^{\tan(x)} \cdot \sec^2(x)$

Ahora, sumaremos $g'(x)$ y $h'(x)$ para obtener la derivada de $f(x)$

$f'(x) = g'(x) + h'(x) = \sec^2\left(e^x\right) \cdot e^x + e^{\tan(x)} \cdot \sec^2(x)$

40.

$$y = \sin(\sin(\sin x))$$

$$f(x) = y = \sin(\sin(\sin x)) = g(g(g(x))) \text{ con } g(x) = \sin(x)$$

por regla de la cadena:

$$f'(x) = g'(g(g(x)))\ g'(g(x))\ g'(x)$$

reemplazando y resolviendo con derivada conocida de sin x:

$$f'(x) = \cos(\sin(\sin x))\cos(\sin(x))\cos(x)$$

41.

$$f(t) = \sin^2\left(e^{\sin^2(t)}\right)$$

Sea $g(t) = \mathrm{sen}^2(t)$, $h(t) = e^t$, debemos calcular la derivada de $f(t) = (g \text{ o } (h \text{ o } g))\ (t)$

Por regla de la cadena:

$$(g \text{ o } (h \text{ o } g))'(t) = g'(h \text{ o } g(t)) \cdot (h \text{ o } g)'(t)$$

Primero, por multiplicación de derivadas:

$$g'(t) = \left(\mathrm{sen}^2(t)\right)'$$
$$= (\mathrm{sen}(t) \cdot \mathrm{sen}(t))'$$
$$= \mathrm{sen}'(t) \cdot \mathrm{sen}(t) + \mathrm{sen}(t) \cdot \mathrm{sen}'(t)$$
$$= \cos(t) \cdot \mathrm{sen}(t) + \mathrm{sen}(t) \cdot \cos(t)$$
$$= 2 \cdot \cos(t) \cdot \mathrm{sen}(t)$$

Además, por regla de la cadena:

$$(h \text{ o } g)'(t) = \left(e^{\mathrm{sen}^2(t)}\right)'$$
$$= e^{\mathrm{sen}^2(t)} \cdot \left(\mathrm{sen}^2(t)\right)'$$
$$= e^{\mathrm{sen}^2(t)} \cdot 2 \cdot \cos(t) \cdot \mathrm{sen}(t)$$

De esta forma:

$$f'(t) = g'(h \text{ o } g(t)) \cdot (h \text{ o } g)'(t)$$
$$= \left[2 \cdot \cos\left(e^{\mathrm{sen}^2(t)}\right) \cdot \mathrm{sen}\left(e^{\mathrm{sen}^2(t)}\right)\right] \cdot \left[e^{\mathrm{sen}^2(t)} \cdot 2 \cdot \cos(t) \cdot \mathrm{sen}(t)\right]$$
$$= 4\left[\cos\left(e^{\mathrm{sen}^2(t)}\right) \cdot \mathrm{sen}\left(e^{\mathrm{sen}^2(t)}\right) \cdot \cos(t) \cdot \mathrm{sen}(t) \cdot e^{\mathrm{sen}^2(t)}\right]$$

42.

Derive: $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

Resolución:

Se utiliza derivada conocida: $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$.

Luego:

$$y' = \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)'$$

$$= \left[\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\right] \cdot \left[x + \sqrt{x+\sqrt{x}}\right]' \qquad \text{(regla de la cadena)}$$

$$= \left[\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\right] \cdot \left[1 + \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)'\right] \qquad \text{(derivada de una suma)}$$

$$= \left[\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\right] \cdot \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \left(x + \sqrt{x}\right)'\right] \qquad \text{(regla de la cadena)}$$

$$= \left[\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\right] \cdot \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right] \qquad \text{(derivada de una suma)}$$

$$= \frac{1 + \dfrac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$