Guía de ejercicios Semana 1

Problema 1.

¿Cómo se podría restringir el dominio de la función en la Figura 1 de la tutoría, para que sea continua en x?

Desarrollo:

Para que la función sea continua en x, se puede restringir el dominio de la función de la siguiente manera:

$$f: [x, x+\delta] \subseteq R \to R,\ \delta \geqslant 0.$$

De esta forma se tiene que $\forall (x_n) \subseteq [x, x+\delta],\ x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$. Por lo que se cumple la continuidad en el punto x.

Problema 2.

Dadas $f: A \subseteq R \to R$ y $g: B \subseteq R \to R$, funciones continuas en $x \in A \cap B$. Probar que las funciones $f - g$, λf (con $\lambda \in R$) y $f \cdot g$ son continuas en x.

a)
$\forall (x_n) \to x$
$(x_n) \in Dom(f-g) \Rightarrow (f-g)(x_n) \to (f-g)(x)$

Dem:
Esto se tiene pues $(f-g)(x_n) = f(x_n) - g(x_n)$ y como f y g son continuas en x, de tal manera que:
$f(x_n) \to f(x) \wedge g(x_n) \to g(x)$, por lo tanto por álgebra de sucesiones se tiene que:
$(f-g)(x_n) = f(x_n) - g(x_n) \to f(x) - g(x) = (f-g)(x)$ por definición de resta de funciones. □

b)
$\forall (x_n) \to x,\ (x_n) \in Dom(f),\ \lambda \in R \Rightarrow \lambda f(x_n) \to \lambda f(x)$

Dem:
Esto es directo, puesto que como f es continua, $f(x_n) \to f(x)$ y por álgebra de sucesiones (sucesión ponderada por una constante) se tiene que $\lambda f(x_n) \to \lambda f(x)$ □

c)
$\forall (x_n) \to x$
$(x_n) \in Dom(fg) \Rightarrow (fg)(x) \to (fg)(x)$

Dem:
Esto se tiene pues $(fg)(x_n) = f(x_n)\, g(x_n)$ y como f y g son continuas en x, se tiene que
$f(x_n) \to f(x) \wedge g(x_n) \to g(x)$, por lo tanto por álgebra de sucesiones sigue que:
$(fg)(x_n) = f(x_n)g(x_n) \to f(x)g(x) = (fg)(x)$ por definición de multiplicación de funciones. □

Problema 3.

"Usando los teoremas de álgebra y composición de funciones continuas, pruebe que las siguientes funciones son continuas:

A) $f(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ es continua $\forall x \in R$

B) $f(x) = \dfrac{a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_o + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n}$ es continua $\forall x \in Dom(f)$

C) $f(x) = a^x$, con $a > 0$, es continua $\forall x \in R$

D) $f(x) = \log_a(x)$, con $a > 0, a \neq 1$, es continua $\forall x \in R_+^*$

E) $f(x) = x^x$, es continua $\forall x > 0$

F) $f(x) = x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$, es continua $\forall x > 0$

G) $f(x) = \tan(x)$ es continua $\forall x \in R \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$

Desarrollo:

A) Sea $f(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$
Podemos definir $a_0 = f(x)_0,\ a_1 = f(x)_1,\ \ldots,\ a_n x^n = f(x)_n$
De donde:
1.$f(x)_0$ es continua, porque a_0 es una constante y por ende continua, $\forall x \in R$
2.$f(x)_1$ es continua, Sea $g: R \to R$, tal que $g(x) = x$, $f(x)_1 = a_1 \cdot x = a_1 \cdot g(x)$, como $g(x)$ es la función identidad (la cual es continua $\forall x \in R$) y a_1 es una constante (continua también), por álgebra de funciones continua, producto de funciones continuas es continua
…
N. $f(x)_n$ es continua, sea $t(x, n) = x^n$ donde $x \in R$ y $n \in N$ (donde N van desde el 1), se sabe que la función exp(x) (cuyo Dom y Cod es R) es continua en todo su dominio, análogamente lo será x^n y como $f(x)_n = x_n \cdot t(x, n)$; producto de funciones continuas es continua. Ahora que $f(x)_0,\ f(x)_1,\ \ldots,\ f(x)_n$ son continuas;
Por álgebra de funciones continuas, la suma de funciones continuas, también es continua, es decir:

$$f(x)_0 + f(x)_1 + \ldots + f(x)_n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = f(x).$$

q. e. d

B) Sea $f(x) = \dfrac{a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}{b_o + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n}$
De donde el:

$$\text{Numerador} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = f(x)'$$

$$\text{Denominador} = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = f(x)''$$

Notar que $f(x)'' \neq 0$, es decir, $x \in Dom(f)$; Ahora al igual que en la parte A); sabemos que $f(x)'$ y $f(x)''$ son continuas, y por álgebra de funciones continuas; el cuociente entre $f(x)'$ y $f(x)''$ también es continua, es decir $f(x)$ es continua.
q. e. d

C) Sea a^x, con $a > 0$, $\forall x \in R$, podemos reescribir la función de la forma:

$$a^x = \exp(\ln(a^x)) = \exp(x \ln(a))$$

Aplicamos algebra de Continuas en $x \ln(a)$. Como $a > 0$, $\ln(a)$ funciona sin problema y por definición es continua, en el caso de x se puede definir como función identidad:
Sea $g: x \to g(x) = x$
Con la misma siendo continua tambien por definición (todo esto con $\forall x > 0$)
Con esto sabemos que $x \ln(x)$ es continua por multiplicación de funciones continuas.
Sabemos que la función exponencial es continua por definición (con $x > 0$).
Con esto podemos aplicar composición de continuas para $\exp(x \ln(a))$, al ser ambas continuas.
Por ende, $f(x)$ es continua $\forall x \in R$.
q. e. d

D) Como demostramos en C) que la función $f(x) = a^x$, con $a > 0$ era continua, tomando su inversa $f^{-1}(x) = \log_a(x)$, con $a > 0, a \neq 1$ (todo "1" elevado a un real, es "1"), definimos el dominio de f^{-1} como R_+^*, el que a su vez es un intervalo de R, usando el teorema de continuidad de las funciones inversas, podemos concluir que $f^{-1}(x) = \log_a(x)$ también es continua
q. e. d

E) Sea $f(x) = x^x$, $\forall x > 0$, podemos reescribir la función de la forma:

$$x^x = \exp(\ln(x^x)) = \exp(x \ln(x))$$

Aplicamos Algebra de Continuas en $x \ln(x)$. Sabemos que $\ln(x)$ es continua por definición del mismo (ademas que $x > 0$) y x se puede definir como función identidad:
Sea $g: x \to g(x) = x$
Con la misma siendo continua tambien por definición (todo esto con $\forall x > 0$)
Con esto sabemos que $x \ln(x)$ es continua por multiplicación de funciones continuas.
Sabemos que la función exponencial es continua por definición (con $x > 0$).
Con esto podemos aplicar composición de continuas para $\exp(x \ln(x))$, al ser ambas continuas.
Finalmente, $f(x)$ es continua $\forall x > 0$
q. e. d

F) Sea $f(x) = x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ $\forall x > 0$, podemos reescribir la función de la forma:

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = (x^x)^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}$$

En el ejercicio E demostramos que x^x es continua $\forall x > 0$.
Aquí si nos fijamos, lo que se hace al elevar esta expresión a x, es multiplicar x^x consigo misma una cantidad de x veces. Al final del día se está multiplicando una función continua por la misma multiples veces, pero manteniendo su condición de función continua por algebra de continuas. Al elevarla nuevamente, usamos la misma logica, por lo que independientemente de cuanto se eleve, sigue siendo continua multiplicada por continua (esto con $\forall x > 0$).
La función $f(x)$ es continua $\forall x > 0$.
q. e. d

G) Sabemos de antemano que la función $\tan(x) = \dfrac{sen(x)}{\cos(x)}$ y también que son continuas por separado en todo R las funciones $sen(x)$ y $\cos(x)$, ahora restringuiendo el Dominio de f a $Dom(f) = R \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$ (para que $\cos(x) \neq 0$), ahora si podemos usar el álgedra de funciones continuas, donde $sen(x)$ y $\cos(x)$ son continuas, entonces $\tan(x)$ también es continua en todo $x \in R \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in Z\right\}$
q. e. d

Problema 4.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in Q \\ x^2 & x \in I \end{cases}$$

Demostrar que $f(x)$ no es continua para $x \in I$.

Sea $x_n = x + \frac{1}{n}$, $x_n \to x$ tal que $f(x_n) \to f(x)$, con x un irracional cualquiera.
Por densidad de Q en R tenemos que para todo real, y en particular, cada término de la sucesión x_n es acotado por racionales, de tal forma que podemos decir que existe una sucesión q_n que cumple que:

$$\forall n,\ x_{n+1} < q_n < x_n$$

De forma tal que por 'teorema del Sandwich', se consigue afirmar que tiende al irracional x, al igual que x_n y x_{n+1}.

Se sigue que por definición de la función sobre los irracionales, a las imágenes de la sucesión x_n, les corresponde su cuadrado, o sea: $f(x_n) = x_n^2$
Al igual que la imágen del límite al que tienden: $f(x) = x^2$

Pero la sucesión q_n al ser una sucesión de racionales, tienen como su imagen a sí mismas, es decir:
$f(q_n) = q_n$.
Y nos damos cuenta que $f(q_n) = q_n \not\to x^2 = f(x)$

$\therefore$ Por definición de continuidad, se sigue que f(x) no es continua en I. □

Así, también podemos ver que si encontramos una sucesión de racionales convergente a un irracional, cuya función no converge a la función de este irracional, entonces la función no es continua "para todo" x en los irracionales

Tenemos que $e \in IQ$, $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $x_n \in$ dominio de f.
$x_n \to e$
$f(x_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \neq e^2$
Si la función fuera continua en todo irracional, enconces tendríamos que $f(x_n) \to f(e) = e^2$ por la continuidad en un punto
Por lo tanto, encontramos al menos una sucesión que no cumple con lo pedido. □

Problema 5.

Probar que la función f(x) = x sen(x) es continua en R.

Desarrollo:

Tomemos $g(x) = x$, por propiedad vemos que esta funcion es continua en R,
y $h(x) = sen(x)$ por propiedad sabemos que es continua en R ademas de que podemos asegurar que:
El dominio de la función permite estudiar el límite def(x) cuando $x \to a$ y $a \in dom(h(x)$ y $g(x))$ tal ques se tiene que:

f es continua en a ssi $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

ademas de que tenemos lo siguiente:

$$g(x): R \to R$$
$$h(x): R \to [-1, 1]$$

$h(x), g(x)$son continuas en los reales, entonces $g \cdot h(x)$ es continua en R por algebra de funciones y $g \cdot h(x) = x \cdot sen(x) = f(x)$

$\therefore f(x)$ es continua en R

Problema 6.

Determinar el valor que debemos dar a $f(0)$ para que $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ sea continua en $x = 0$

Desarrollo

Dado $x = 0$ podemos decir que, de existir un limite para $f(x)$, la función puede decirse continua en x.

Al evaluar $\lim_{x \to x=0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ podemos decir que esto es una sucesión nula por una acotada, lo que sabemos que tiende a 0.

Demostraremos usando el teorema del sandwich para el coseno, dando el valor máximo como 1 y el mínimo como -1.

queda así: $\lim_{x \to x=0} -x^2 \leqslant \lim_{x \to x=0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \lim_{x \to x=0} x^2$

$$0 \leqslant \lim_{x \to x=0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 0 \Rightarrow \lim_{x \to x=0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Teorema usado: teorema del sandwich 10.2 en el apunte de intro al calculo pag 166 para plantear la solucion. Luego usando algebra de limites planteamos que con x tiende a 0, x cuadrado tiende a 0.

$$\lim_{x \to x=0} x = 0 = \frac{0}{1} \Rightarrow 0^2 = \frac{0^2}{1^2} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow 0 = 0^2 = \lim_{x \to x=0} x^2 = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x=0} -x^2 = 0$$

Problema 7.

Sea f la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \forall x \neq 0 \\ \alpha & x = 0 \end{cases}$$

Probar que, independientemente del valor de α, la función no es continua en 0.

Resolución:
Para esto primero debemos recordar la definición de continuidad, la cual es:

$$\forall (x_n \in \mathbb{R})\, (x_n \to x) \to (f(x_n) \to f(x)) \tag{1}$$

Entonces, de ser continua, cualquier sucesión que tienda a 0 evaluada en f debería entregar como resultado el mismo valor, que en este caso correspondería a α, por lo que si encontrásemos dos sucesiones que tiendan a 0, pero evaluadas f entreguen resultados distintos, entonces podremos asegurar que esta función no es continua en x=0 para ningun valor de .
Primera sucesión:

$$x_{n1} = \frac{1}{2n} \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n} = 0 \tag{2}$$

Evaluando esta primera sucesión obtendremos nuestro candidato a α:

$$f(x_{n1}) = \lim_{n \to \infty} \sin\left(\frac{\pi}{\left(\frac{1}{2n}\right)}\right) = \lim_{n \to \infty} \sin(2n\pi) \tag{3}$$

Conociendo la periodicidad del seno en 2kπ, con $k \in \mathbb{Z}$, y sabiendo que $n \in \mathbb{N}$, tenemos que esta periodicidad se cumple también para 2nπ, por lo que se justifica lo siguiente:

$$\lim_{n \to \infty} \sin(2n\pi) = \lim_{n \to \infty} \sin(0 + 2n\pi) = \lim_{n \to \infty} \sin(0) = \sin(0) = 0 \tag{4}$$

Ahora ponemos a prueba al 0 como el candidato a α y veremos si existe alguna sucesión cuya evaluación en f tiene otro valor.

Segunda sucesión:

$$x_{n2} = \frac{1}{\frac{1}{2} + 2n} \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{2} + 2n} = 0 \qquad f(x_{n2}) = \lim_{n \to \infty} \sin\left(\frac{\pi}{\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+2n}\right)}\right) = \lim_{n \to \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \tag{5}$$

Utilizando nuevamente la preiodicidad del seno reducimos el desarrollo:

$$\lim_{n \to \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \lim_{n \to \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \tag{6}$$

Juntando todo esto, podemos decir con seguridad que la función no es continua en 0, ya que cuando intentamos conocer el valor de α, notamos que existen sucesiones que tienden a 0, pero que al evaluarse en f entregan como resultado otro valor.

Problema 8.

Estudiar la continuidad de la funcion $f: R \to R$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in Q \\ 0 & \text{si } x \notin Q \end{cases}$$

Analice por separado los casos $x = 0 \wedge x \neq 0$

Dem:
(1) Caso $x = 0$
Observar $f(0) = 0$, ahora, sin perdida de generalidad, sea $X_n \in R$ tq $X_n \to 0$.
Se tendra:

$$f(X_n) = \begin{cases} X_n^2 & \text{si } X_n \in Q \\ 0 & \text{si } X_n \notin Q \end{cases}$$

Se tiene que:

$$0 \leq f(X_n) \leq X_n^2$$

Tomando limites:

$$\lim_{n \to \infty} 0 \leq \lim_{n \to \infty} f(X_n) \leq \lim_{n \to \infty} X_n^2$$
$$0 \leq \lim_{n \to \infty} f(X_n) \leq 0 \cdot 0$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} f(X_n) = 0 = f(0),\ \text{por teorema del sandwich}$$

Asi para $f(x)$ con $x = 0$ es continua ya que cumple con $\forall X_n \in R,\ X_n \to x \Rightarrow f(X_n) \to f(x)$

(2) Caso $x \neq 0 \wedge x \in Q$:
Se tiene que: $f(x)$ es continua en $x \Leftrightarrow \forall (X_n) \subseteq R,\ X_n \to x \Rightarrow f(X_n) \to f(x)$
Se define $X_n \to x$:

$$X_n = \frac{\sqrt{2}}{n} + x \notin Q$$
$$\Rightarrow f(X_n) = \left(\frac{\sqrt{2}}{n} + x\right) \to 0$$

Se define otra sucesion $S_n \to x$:

$$S_n = \frac{1}{n} + x \in Q$$
$$\Rightarrow f(S_n) = \left(\frac{1}{n} + x\right) \to x^2$$
$$\to \leftarrow$$

Lo que es una contradiccion con la hipotesis, por lo que concluimos que $f(x)$ no es continua en x con $x \neq 0$ para $x \in Q$ no es continua

(3) Caso $x \neq 0 \wedge x \notin Q$
Al ser Q denso en R a demostracion para este caso es analoga, por lo que para $x \notin Q$, $f(x)$ tampoco es continua en x.
Bastaria tomar $X_n \to x$ con $X_n \in Q \wedge S_n \to x$ con $S_n \notin Q$ con lo que se tendra que:
$f(X_n) = X_n^2 \to x^2 \wedge f(S_n) = 0 \to 0$ lo que contradice que sea continua.

Los teoremas mencionados (de este semestre) se encuentran:
- Definición continuidad pagina 3 del apunte

Problema 9.

Probar que la función definida por f(x) = exp(−1/x^2) si x = 0 y f(0) = 0, es continua en R.

$$f(x) \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Por álgebra y composición de funciones continuas, la función exponencial es continua, por lo que para demostar que f(x) es continua en los reales solo faltaría analizar la continuidad de el punto crítico $x = 0$, este se puede sacar mediante límites laterales

$\lim_{x \to 0^-} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$ En este caso basta hacer un cambio de variable tal que cuando $x \to 0^-$, $u \to \infty^+$ osea
$u = \frac{1}{x^2}$ de esta manera tenemos que $x^2 = \frac{1}{u}$ y el limite quedaria asi $\lim_{u \to \infty^+} \exp(-u)$ el cual es un limite conocido que tiene como resultado 0.

$\lim_{x \to 0^+} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$ Este caso es analogo al x tendiendo a 0 por la izquierda ya que el x al estar elevado a dos se podria decir que "ignora" el signo y siempre toma valores positivos

Entonces por apunte sabemos que si $\lim_{x \to 0^+} f(x) = L \wedge \lim_{x \to 0^-} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = L$, por eso podemos afirmar que $\lim_{x \to 0} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) = 0$

Problema 10.

Determinar el dominio y puntos de continuidad de las siguientes funciones

3.1.a $x \mapsto \sin(x)/\ln(1+\exp(x))$
Dominio: sabemos que ln(1)=0, por lo tanto en $\ln(1+\exp(x))$ tenemos:
$1 + \exp(x) = 1 \Leftrightarrow \exp(x) = 0$
También sabemos que $\exp(x)$ es siempre positivo, por lo tanto el Dominio de la función es R.
Puntos de continuidad: Tenemos que $\sin(x)$ es una función continua $\forall x \in R$, y además se tiene que $\ln(x)$ es función continua $\forall x \in R_+^*$ donde $1 + \exp(x) > 1$ sin importar el x, por lo tanto la función $\ln(1+\exp(x))$ es continua en R, con esto se concluye que por el Teorema de álgebra de funciones continuas la función $\sin(x)/\ln(1+\exp(x))$ es continua en R.

3.1.b $x \mapsto \sqrt{1 + \ln(1+x^3)}$
Dominio: sabemos que la raíz cuadrada solo esta definida para numeros mayores o iguales a cero en los reales, por lo que $1 + \ln(1+x^3) \geqslant 0$. A su vez estará definida desde cuando

$1 + \ln(1 + x^3) = 0 \Leftrightarrow \ln(1 + x^3) = -1 \Leftrightarrow 1 + x^3 = 1/e \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{e} - 1$

$\Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{1 - \frac{1}{e}}$. Por lo tanto en esta función $x \in \left[-\sqrt[3]{1 - \frac{1}{e}},\ +\infty\right]$
Puntos de continuidad: Ya que calculamos su dominio es fácil darnos cuenta de que $\forall x \in \left[-\sqrt[3]{1 - \frac{1}{e}},\ +\infty\right]$ la función sera continua, esto se debe a que ln(x) es continua $\forall x \in R_+^*$y como la raíz esta definida para $\forall x$ donde cumpla que $f(x) \geqslant 0$, esto se dará en este intervalo.

3.1.c $x \mapsto \exp(x)x^{3/2}/\tan(x)$
Dominio: $\tan(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$
por lo tanto el dominio de la función es $R \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in Z\}$.
Puntos de continuidad: Tenemos que la función $\exp(x)$ es continua $\forall x \in R$, también tenemos que $x^{3/2}$ es continua en $[0, +\infty)$ y por último la función $\tan(x)$ es continua $\forall x \in R \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in Z\}$, por lo tanto por el Teorema de álgebra de funciones continuas la función $\exp(x)x^{3/2}/\tan(x)$ es continua en $[0, +\infty) \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in Z\}$.

Problema 11.

Estudie dominio y continuidad de las funciones cot(x), sec(x), cosec(x).
Desarrollo

Función cot(x)

Notemos que cot(x) = cos(x)/sen(x)
La función cot es continua por álgebra de división de funciones continuas, pues, la función cos(x) es continua y la función sen(x) es continua también.

$$Dom(cot) = \mathbb{R} \setminus \{x \in (\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z})\}$$

Función sec(x)

Veamos ahora de qué se compone la función secante, entonces sec(x) = 1/cos(x) la función es continua por el mismo argumento anterior es una división de funciones continuas con dominio restringido en los que el denominador se hace 0

$$Dom(sec) = \mathbb{R} \setminus \{x \in (\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z})\}$$

Función cosec(x)

La función cosecante está definida por la forma cosec(x) = 1/sen(x) y por el mismo argumento de las partes anteriores la función es continua.

$$Dom(cosec) = \mathbb{R} \setminus \{x \in (\pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z})\}$$

Problema 12.

(a) Sean $f, g: A \subset R \to R$ funciones continuas, tal que $g(x) > 0$ para todo $x \in A$. Demuestre que la función $h(x) = g(x)^{f(x)}$ esta bien definida y es continua en A.

$$h(x) = g(x)^{f(x)} = \exp\left(\ln\left(g(x)^{f(x)}\right)\right) = \exp(f(x)\ln(g(x)))$$

(1) $(g: A \to R \wedge \ln: (0, \infty) \to R) \Rightarrow Dom(\ln \circ g) = \{x \in A: g(x) > 0\} = A \Rightarrow \ln \circ g$ es continua en A.

(2) $(f: A \to R \wedge \ln \circ g: A \to R) \Rightarrow f(x) \cdot \ln(g(x))$ es continua en A por algebra de funciones continuas.

(3) $\left(f \cdot (\ln \circ g): A \to R \wedge \exp: R \to R^+\right) \Rightarrow \exp(f(x)\ln(g(x)))$ es continua y bien definida en A.

Debido a que h es una composición de funciones continuas donde se opera solo con funciones continuas y se cumple el teorema de algebra de funciones continuas y composicion de funciones continuas se concluye que $h(x)$ es continua.

(b) Estudiar la convergencia de la sucesión $y_n = \left(\dfrac{2n-1}{n}\right)^{\exp(1/n)}$.

Desarrollemos un poco la expresión:

$$y_n = \left(\frac{2n-1}{n}\right)^{\exp(1/n)} = \left(\frac{2n}{n} - \frac{1}{n}\right)^{e^{1/n}} = \left(2 - \frac{1}{n}\right)^{\sqrt[n]{e}}$$

Luego analicemos que pasa cuando $n \to \infty$, es decir, aplicar límite,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n}\right)^{\sqrt[n]{e}} = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{n}\right)^{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{e}} = (2-0)^1 = 2$$

Por álgebra de limites, $\lim_{n\to\infty} h_n^{s_n} = \lim_{n\to\infty} h_n^{\lim_{n\to\infty} s_n}$ siempre cuando h_n y s_n convergen, luego por limites conocidos, $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{e} = 1$ y $\lim_{n \to \infty}\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$, finalmente concluimos que la sucesión y_n converge y posee limite igual 2.