DERIVADAS:

cuantas veces derivamos

- $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x)$$

- Si una función es derivable $\Rightarrow$ será continua

- Álgebra con f y g funciones derivables como:
  - * $(f \pm g)' = f' \pm g'$
  - * $(f \cdot g)' = f'g + g'f$
  - * $(f/g)' = (f'g - g'f)/g^2$
  - * Si α es una constante y tenemos $(\alpha \cdot f(x))'$ $= \alpha\, f(x)'$

$f(x) = x^2 + 1$

$$\frac{d\, f(x)}{dx} = \frac{d\,(x^2+1)}{dx} = 2x + 0 = 2x$$

$$\frac{d\, f(x)}{dz} = \frac{d\,(x^2+1)}{dz} = (x^2 + 1^2)' = 0$$

$f(x) = x^2 + 1 \quad \| \quad 1/2 \cdot f(x) = x^2/2 + 1/2$

$$\frac{d\,(1/2 \cdot f(x))}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d\,(f(x))}{dx} = 1/2\,(2x) = x$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{d\,(f^*(x))}{dx} = (x^2/2 + 1/2)' = x$$

P1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable y $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, calcule:

$$\lim_{\delta \to 0} \left(\frac{f(x+\delta)}{f(x)} \right)^{1/\delta}$$

Indicación: usar exp y ln //

$$\lim_{\delta \to 0} \exp\left(\ln \left(\frac{f(x+\delta)}{f(x)} \right)^{1/\delta} \right) =$$

$$\lim_{\delta \to 0} \exp\left(\frac{1}{\delta} \ln \left(\frac{f(x+\delta)}{f(x)} \right) \right) =$$

$$\lim_{\delta \to 0} \exp\left[\frac{1}{\delta} \left(\ln(f(x+\delta)) - \ln(f(x)) \right) \right]$$

$$\lim_{\delta \to 0} \exp\left[\frac{\ln(f(x+\delta)) - \ln(f(x))}{\delta} \right]$$

$$= \exp((\ln(f(x)))') = \exp\left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)$$

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f(x)' = \frac{x'}{x} = \frac{1}{x}$$

P2) Con $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y derivables tenemos que:

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x f(x) + 1$

2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $g(x+y) = g(x) \cdot g(y)$

3) $f(0) = 1$

Entonces demuestre que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = g(x)$ y que $\forall n \in \mathbb{N}$ $g(x) = x f^{(n)}(x) + n f^{(n-1)}(x)$

PDQ: $\forall x \in \mathbb{R}, \ g'(x) = g(x)$

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \quad // \text{ por } (2):$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x)g(h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(x)[g(h) - 1]}{h}$$

$$= g(x) \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - 1}{h} \underset{(1)}{=} g(x) \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h} f(h)}{\cancel{h}}$$

$$= g(x) \lim_{h \to 0} f(h) = g(x) \underset{(2)}{f(0)} = g(x) \ \blacksquare$$

$$g'(x) = g(x) \ \blacksquare$$

PDQ: $\forall n \in \mathbb{N}, \ g(x) = x f^{(n)}(x) \ n f^{(n-1)}(x)$

ya sabemos que $g(x)' = g(x)$

$$\boxed{\begin{aligned} g'(x) &= g^{1}(x) \\ g''(x) &= g^{(2)}(x) \end{aligned}}$$

1.-) $g(x) = x f(x) + 1$

2.-) $g'(x) = x f'(x) + f(x)$

3.-) $g''(x) = x f''(x) + 2 f'(x)$

$\vdots$

Llegaremos a lo que nos piden ü

- Caso Base: $(n = 1)$: $g'(x) = x f'(x) + f(x)$
- Hipótesis Inductiva: $g^{(n)}(x) = x f^{(n)}(x) + n f^{(n-1)}(x)$
- Paso Inductivo: inducción fuerte

$$g^{(n+1)}(x) = (g^{(n)}(x))'$$

$$= (x f^{(n)}(x) + n f^{(n-1)}(x))'$$

$$= x f^{(n+1)}(x) + f(x) + n f^{(n)}(x) \quad \text{por inducción!}$$

$$= x f^{(n+1)}(x) + (n+1) f^{(n)}(x) \ \blacksquare$$