

P1. De algún lugar sale el promedio

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) = f(b)$. Muestre que la función

$$g(t) = f\left(t + \frac{b-a}{2}\right) - f(t)$$

se anula en al menos un punto de $[a, \frac{a+b}{2}]$.

Concluya que si Leo recorre 4 km en una hora, entonces existe un intervalo de exactamente 30 minutos en el que recorrió 2 km.

P2. Demuestre que la ecuación

$$\text{sen}(\cos(x)) = x$$

Tiene al menos una solución en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

P3. Función Lipschitziana

Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice Lipschitziana con $L \geq 0$ si

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Muestre que toda función Lipschitziana es continua. ¿Será toda función Lipschitziana uniformemente continua? ¿Y viceversa?