

P1. La intuición lo dice todo

Una de estas dos funciones es continua en $x = 0$, determine cuál lo es y demuéstrelo.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

P2. No queda de otra

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < 0$ en $(-\infty, c)$ y $f(x) > 0$ en $(c, +\infty)$.
¿Cuál es el valor de $f(c)$?

P3. Seamos positivos

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, donde I es un intervalo. Sea a un elemento interior de I tal que $f(a) > 0$. Muestre que existe un $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) > 0$ para $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.