Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
10 de Julio de 2009

Pauta Guía Problemas Semana 15

Profesor: Jorge San Martin H.
Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Sea $f : \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{\operatorname{sen}(x)} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Demostrar que la función f' está dada por

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\frac{\operatorname{sen}(x)}{1+x} - \cos(x)\ln(1+x)}{(\operatorname{sen}(x))^2} & x \neq 0 \\ -\frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

y encontrar el polinomio de Taylor de orden 2.

Solución:
Comencemos calculando la derivada de f para $x \neq 0$. Por la regla del cuociente, tenemos

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(1+x)}{\operatorname{sen}(x)}\right)' = \frac{(\ln(1+x))'\operatorname{sen}(x) - \ln(1+x)(\operatorname{sen}(x))'}{\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{\frac{\operatorname{sen}(x)}{1+x} - \ln(1+x)\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)},$$

que es justo lo que se nos pedía obtener en esta rama.
Ahora, para el caso $x = 0$, debemos calcularla por definición. Siendo así, tenemos

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\ln(1+h)}{\operatorname{sen}(h)} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \operatorname{sen}(h)}{h\operatorname{sen}(h)}.$$

Dado que hemos llegado a una expresión del tipo $\frac{0}{0}$, usemos la regla de L'Hôpital. Entonces:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \operatorname{sen}(h)}{h\operatorname{sen}(h)} = \lim_{h\to 0} \frac{(\ln(1+h) - \operatorname{sen}(h))'}{(h\operatorname{sen}(h))'} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{1+h} - \cos(h)}{\operatorname{sen}(h) + h\cos(h)} = \lim_{h\to 0} \frac{1 - \cos(h) - h\cos(h)}{(1+h)(\operatorname{sen}(h) + h\cos(h))}.$$

Y tras una nueva inspección, notamos que seguimos teniendo una expresión del estilo ya mencionado; por lo que nuevamente podríamos aplicar L'Hôpital. De esta manera:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{1 - \cos(h) - h\cos(h)}{(1+h)(\operatorname{sen}(h) + h\cos(h))} &= \lim_{h\to 0} \frac{[1 - \cos(h) - h\cos(h)]'}{[(1+h)(\operatorname{sen}(h) + h\cos(h))]'} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h) - \cos(h) + h\operatorname{sen}(h)}{1\cdot(\operatorname{sen}(h) + h\cos(h)) + (1+h)(\cos(h) + \cos(h) - h\operatorname{sen}(h))} \\ &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Donde la última igualdad, se da al evaluar los límites conocidos que resultaron.

Para encontrar el polinomio de Taylor de segundo orden, necesitamos además $f''(0)$, cuyo valor se encuentra en forma análoga a como se encontró $f'(0)$, y se deja como ejercicio para el lector. Sea como sea que se resuelva, obtendremos $f''(0) = 1$. Así, el polinomio pedido es

$$P_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)(x-0)}{1!} + \frac{f''(0)(x-0)^2}{2!} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}.$$

P2. Sea $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$. Demostrar que $f' = xf$ y que para $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x_0) = x_0 f^{(n-1)}(x_0) + (n-1)f^{(n-2)}(x_0)$$

Use esta fórmula para encontrar el polinomio de Taylor en torno a 1 de orden 4 y el polinomio de Taylor de f en torno a 0 de orden n, cualquiera.

Solución:
Calculemos f':

$$f'(x) = \left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)' = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x = xf(x).$$

Entonces, si $n > 1$, por la Fórmula de Leibnitz:

$$f^{(n)}(x) = (xf(x))^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{(k)} f^{(n-1-k)}(x).$$

Notemos que para la función x se tiene que $x^{(0)} = x$ (definición), $x^{(1)} = x' = 1$ y luego $x^{(k)} = 0,\ \forall k \geq 2$. Utilizando esta información en la expresión anterior observamos que de la sumatoría sólo quedarán los términos con $k = 0$ y $k = 1$, pues para los demás $x^{(k)} = 0$. Así

$$f^{(n)}(x) = \binom{n-1}{0} x f^{(n-1)}(x) + \binom{n-1}{1} f^{(n-2)}(x) = xf^{(n-1)}(x) + (n-1)f^{(n-2)}(x)$$

y evaluando en x_0 se obtiene el resultado.

Con esto, calculemos las cinco primeras derivadas (incluida la de orden 0 que es la función) evaluadas en 1:

- $f^{(0)}(1) = f(1) = \sqrt{e}$
- $f^{(1)}(1) = f'(1) = 1 \cdot f(1) = \sqrt{e}$
- $f^{(2)}(1) = 1 \cdot f'(1) + 1 \cdot f(1) = 2f(1) = 2\sqrt{e}$
- $f^{(3)}(1) = 1 \cdot f^{(2)}(1) + 2 \cdot f'(1) = 2\sqrt{e} + 2\sqrt{e} = 4\sqrt{e}$
- $f^{(4)}(1) = 1 \cdot f^{(3)}(1) + 3 \cdot f^{(2)}(1) = 4\sqrt{e} + 6\sqrt{e} = 10\sqrt{e}$

Y así, el polinomio de Taylor de orden 4 en torno a 1 es:

$$T_4(x) = \sqrt{e} + \sqrt{e}(x-1) + \sqrt{e}(x-1)^2 + \frac{2\sqrt{e}}{3}(x-1)^3 + \frac{10\sqrt{e}}{24}(x-1)^4.$$

Para calcular la expansión de Taylor en torno a 0, notemos que de la fórmula obtenida con anterioridad tenemos que

$$f^{(n)}(0) = (n-1)f^{(n-2)}(0).$$

Entonces, podemos notar que $f^{(0)}(0) = f(0) = 1$, $f'(0) = 0 \cdot f(0) = 0$, $f''(0) = 1 \cdot f(0) = 1$, $f'''(0) = 2 \cdot f'(0) = 0$, y por inducción se puede verificar que

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (k-1) & ,\ k \text{ par} \\ 0 & ,\ k \text{ impar} \end{cases}.$$

Luego, el polinomio de Taylor pedido será, dependiendo de la paridad o imparidad de n:

$$T_n(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{1\cdot 3\cdot x^4}{4!} + \ldots \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (n-1)x^n}{n!} & ,\ n \text{ par} \\ 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{1\cdot 3\cdot x^4}{4!} + \ldots \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (n-2)x^{n-1}}{(n-1)!} & ,\ n \text{ impar} \end{cases}.$$

Esto es así, ya que en el caso de n impar, ya vimos que $f^{(n)}(0) = 0$, por lo que el último término de la sumatoria no aparecerá.

P3. Demuestre que si f alcanza un máximo en x_0 y es derivable en x_0 entonces $f'(x_0) = 0$. Use este hecho para encontrar el máximo de la función $\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$.

Solución:
Mostremos en primer lugar el siguiente resultado:

Si x_0 es máximo de f, entonces

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad f(x_0 - \varepsilon) \leq f(x_0) \wedge f(x_0 + \varepsilon) \leq f(x_0)$$

Demostración: Por contradicción, supongamos que

$$(\exists \bar{\varepsilon} > 0) \quad f(x_0 - \bar{\varepsilon}) > f(x_0) \vee f(x_0 + \bar{\varepsilon}) > f(x_0).$$

Es directo que esto es una contradicción con el hecho que x_0 es máximo de f. Luego, se tiene la propiedad.$\blacksquare$

Una vez dicho esto, notemos que como f es derivable en x_0 en particular los limites laterales en la definición de derivada existen y además

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \leq \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Esto último se tiene por la propiedad recién demostrada, y como ambos limites son iguales se tiene que

$$f'(x_0) \leq 0 \leq f'(x_0) \Longrightarrow f'(x_0) = 0.\blacksquare$$

Ahora, calculemos $f'(x)$ para la función que se propone en el enunciado, utilizando el operador logarítmico $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(x)] &= \mathcal{L}[\ln(1 + x^2)] - \mathcal{L}[1 + x^2] \\
&= \frac{2x}{(1 + x^2)\ln(1 + x^2)} - \frac{2x}{(1 + x^2)} \\
&= \frac{2x(1 - \ln(1 + x^2))}{(1 + x^2)\ln(1 + x^2)}.
\end{aligned}$$

Y por ende

$$f'(x) = f(x)\,\mathcal{L}[f(x)] = \frac{\ln(1 + x^2)}{1 + x^2} \cdot \frac{2x(1 - \ln(1 + x^2))}{(1 + x^2)\ln(1 + x^2)} = \frac{2x(1 - \ln(1 + x^2))}{(1 + x^2)^2}$$

Ahora, debemos resolver la ecuación $f'(x) = 0$, para $x \in \operatorname{Dom} f$. Entonces

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\Longleftrightarrow \frac{2x(1 - \ln(1 + x^2))}{(1 + x^2)^2} = 0 \\
&\Longleftrightarrow 2x(1 - \ln(1 + x^2)) = 0 \\
&\Longleftrightarrow x = 0 \vee \ln(1 + x^2) = 1 \\
&\Longleftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{e - 1}.
\end{aligned}$$

Observemos que dado que f es par, si encontramos un máximo en x_0 entonces $-x_0$ también será un máximo. Por este motivo, nos basta analizar las soluciones positivas.

Como obtuvimos 3 soluciones, debemos evaluar en cada una para ver cual(es) efectivamente es(son) máximo(s) de la función.

- $f(0) = 0$.
- $f(\sqrt{e - 1}) = \frac{1}{e}$

Por lo tanto, f tiene máximos en $\pm\sqrt{e - 1}$ y valen $\frac{1}{e}$.

P4. Demuestre que si $f''(x_0)$ existe entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0)$$

Use esta expresión para probar que si f tiene un mínimo en x_0 entonces $f''(x_0) \geq 0$. Con ayuda de esto último, determine si 0 es un mínimo de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Solución:
Para la primera parte, notemos que en el límite propuesto, tanto el numerador como el denominador tienden a cero, cuando $h \to 0$. Luego, es válido aplicar la regla de L'Hôpital, y tendremos lo siguiente:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}.$$

Esto último, recordando que la regla se aplica sobre la variable del límite (en este caso, h), y sabiendo que x_0 es una constante. Luego, notemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h} &= \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)-f'(x_0)+f'(x_0)}{2h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{2h} + \frac{f'(x_0)-f'(x_0-h)}{2h}.
\end{aligned}$$

Por último, notando que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0)-f'(x_0-h)}{2h} = \frac{f''(x_0)}{2},$$

se concluye que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} = \frac{f''(x_0)}{2} + \frac{f''(x_0)}{2} = f''(x_0).$$

Probemos ahora la segunda parte del problema.

Notar que si x_0 es un mínimo de la función f, se tiene que

$$f(x) \geq f(x_0), \qquad \forall x \in \mathrm{Dom}(f).$$

Luego, en particular tenemos que

$$f(x_0+h) \geq f(x_0) \quad \wedge \quad f(x_0-h) \geq f(x_0).$$

Si sumamos ambas expresiones, se tendrá que

$$f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0) \geq 0.$$

En este punto, dividiendo a ambos lados por h^2, y luego tomando el límite cuando $h \to 0$, tenemos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} \geq 0 \Longleftrightarrow f''(x_0) \geq 0. \blacksquare$$

Terminemos el problema, probando si $x_0 = 0$ es efectivamente un mínimo de la función presentada. Utilizando la primera parte, calcularemos $f''(0)$ como sigue

$$\begin{aligned}
f''(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h)+f(0-h)-2f(0)}{h^2} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(h)+f(-h)-2f(0)}{h^2} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\mathrm{sen}(h)}{h} + \frac{\mathrm{sen}(-h)}{-h} - 2}{h^2} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}(h)-2h}{h^3}.
\end{aligned}$$

Vemos que el numerador y el denominador tienden a cero en esta situación, por lo que podremos aplicar la regla de L'Hôpital. Tras hacer esto, seguiremos en la misma situación, por lo la regla será aplicada dos veces en total. Así:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{2\operatorname{sen}(h)-2h}{h^3} &= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos(h)-2}{3h^2}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{-2\operatorname{sen}(h)}{6h}\\
&= \lim_{h\to 0}-\frac{2}{6}\cdot\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\\
&= -\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}\leq 0.
\end{aligned}$$

De lo que concluimos que $x_0 = 0$ no es mínimo de f.$\blacksquare$

P5. Encuentre el desarrollo de Taylor de la función $(1+x)^n$ de orden n en torno a 0. Interprete su resultado en términos del teorema del Binomio.

Solución:
Necesitamos saber el valor de $f^{(k)}(0), \forall k \in \mathbb{N}$. Para esto, calculemos algunas:

- $f^{(0)}(0) = 1 = \frac{n!}{n!}$
- $f^{(1)}(0) = n = \frac{n!}{(n-1)!}$
- $f^{(2)}(0) = n(n-1) = \frac{n!}{(n-2)!}$

Razonando por inducción, se puede mostrar que $f^{(k)}(0) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

En conclusión, el polinomio de Taylor de orden n en torno a 0 de la función $f(x) = (1+x)^n$ está dado por

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}x^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

que es justamente, la expresión que da el Teorema del Binomio de Newton para $(1+x)^n$.