Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
07 de Mayo de 2009

Pauta Guía Problemas Semana 8

Profesor: Jorge San Martin H.
Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Probar que $\inf\left\{\frac{1}{2n+1} \;:\; n \in \mathbb{N}\right\} = 0$

Solución

Llamemos A al conjunto bajo estudio. Comprobaremos que 0 cumple las dos propiedades del ínfimo, es decir

(a) 0 es cota inferior de A.

(b) Cualquier otra cota inferior de A es menor que 0.

Veamos cada propiedad por separado.

(a) Por definición, 0 es cota inferior de A ssi $(\forall x \in A)\ 0 \leq x$. En efecto, los elementos de A son de la forma $\frac{1}{2n+1}$, con $n \in \mathbb{N}$. Notemos que 1 y $2n+1$ son estrictamente positivos para todo n natural, por lo tanto también su cuociente, y entonces tenemos que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \frac{1}{2n+1} \geq 0$. De esto se sigue que 0 es cota inferior de A.

(b) Ahora probaremos que ningún número positivo puede ser cota inferior de A, es decir, mostraremos que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m \in \mathbb{N}) \quad \frac{1}{2m+1} < \varepsilon.$$

En efecto, dado $\varepsilon > 0$, por la Propiedad Arquimediana, $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $1 < m\varepsilon$. Notemos que $1 < m\varepsilon < 2m\varepsilon < 2m\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon(2m+1)$, desigualdades válidas pues todas las cantidades involucradas son estrictamente positivas. Obtenemos que

$$1 < \varepsilon(2m+1) \iff \frac{1}{2m+1} < \varepsilon.$$

Hemos demostrado que ningún número positivo puede ser cota inferior de A, pues dado cualquiera, hay un elemento en A menor que éste. Por lo tanto, cualquier cota inferior c de A debe cumplir que $c \leq 0$.

De todo lo anterior, concluimos que 0 es el ínfimo de A.$\blacksquare$

P2. Sea f una función creciente cuyo dominio es el intervalo $[0,1]$. Demuestre que el conjunto $f([0,1])$ es acotado superiormente. Calcule el supremo del conjunto $f([0,1])$ y determine si posee máximo.

Solución

Por hipótesis tenemos que f es creciente, y de la definición tenemos que

$$(\forall x_1, x_2 \in \text{ Dom } f) \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Tomando $x_2 = 1$ (pues la propiedad debe cumplirse para cualquier x_2), tenemos que

$$(\forall x \in \text{ Dom } f) \quad x \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq f(1).$$

Notemos que el lado izquierdo de la implicación siempre es verdadero, por lo que ha de tenerse que

$$(\forall x \in [0,1]) \quad f(x) < f(1).$$

Y con esto $f([0,1])$ es acotado superiormente por $f(1)$. Luego, por axioma del supremo, $f([0,1])$ tiene supremo. Notemos que $f(1) \in f([0,1])$. Entonces, $f(1)$ es el máximo del conjunto $f([0,1])$ y por lo tanto su supremo.$\blacksquare$

P3. Dados a y b reales, demuestre que si para cualquier $\varepsilon > 0$ se cumple que $a \leq b + \varepsilon$, entonces $a \leq b$.
Solución
Sabemos que

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon > 0) \quad a \leq b + \varepsilon \\ \iff & (\forall \varepsilon > 0) \quad a - b \leq \varepsilon \\ \iff & (\forall \varepsilon \in (0, +\infty)) \quad a - b \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

De donde concluimos que $a - b$ es cota inferior de $(0, +\infty)$.

Por otra parte, sabemos que $\inf(0, +\infty) = 0$, y por definición de ínfimo, cualquier cota inferior de $(0, +\infty)$ debe ser menor o igual que él, en particular, tenemos que

$$a - b \leq 0 \iff a \leq b. \blacksquare$$

P4. Sean S y T subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que para todo $x \in S$ y para todo $y \in T$ $x \leq y$. Probar que S tiene supremo, que T tiene ínfimo, y que $\sup S \leq \inf T$.
Solución
Sabemos que $(\forall x \in S)(\forall y \in T)$ $x \leq y$. Mirando la segunda parte de la proposición, tenemos que

$$(\forall y \in T) \quad x \leq y.$$

Lo que nos dice que T es acotado inferiormente (por cualquier elemento de S). Por lo tanto, por Axioma del Supremo, T tiene ínfimo. Además, por definición de ínfimo, se debe tener que

$$(\forall x \in S) \quad x \leq \inf T.$$

Lo que prueba que S es acotado superiormente. Nuevamente, por Axioma del Supremo, tenemos que S tiene supremo, y además, por definición de supremo tenemos que

$$\sup S \leq \inf T. \blacksquare$$

P5. Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$, los cuales verifican las siguientes propiedades:

(a) $A \cup B = \mathbb{R}$

(b) Todo elemento de A es menor que todo elemento de B

Demuestre que existe un real α que es simultáneamente cota superior de A y cota inferior de B. Pruebe, además, que dicho número real α es único.
Solución
En el problema anterior hemos probado que si un par de subconjuntos A, B no vacíos de $\mathbb{R}$ satisfacen la condición (b), entonces $\sup A \leq \inf B$. Veamos que no puede ser que $\sup A < \inf B$.

En efecto, si esto fuera cierto, por densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, $\exists q \in \mathbb{Q}$ tal que $\sup A < q < \inf B$, lo que implica que $q \notin A \wedge q \notin B$. Luego, $q \notin A \cup B$ y por lo tanto $A \cup B \subsetneq \mathbb{R}$, lo que contradice (a). Concluimos que $\sup A = \inf B$. Llamando $\alpha = \sup A = \inf B$, tenemos que α es simultáneamente cota superior de A (la menor) y cota inferior de B (la mayor), además como es un supremo, es único.

P6. Sean A, B, C subconjuntos de $\mathbb{R}$ no vacíos y acotados. Pruebe que si para todo $x \in A$ y todo $y \in B$ existe $z \in C$ tal que $x + y \leq z$, entonces $\sup A + \sup B \leq \sup C. \blacksquare$
Solución
Consideremos el conjunto

$$A + B = \{x + y \in \mathbb{R} \ : \ x \in A, y \in B\}.$$

Entonces, sabemos que

$$(\forall u \in A + B)(\exists z \in C) \quad u \leq z.$$

Lo que prueba $A + B$ es acotado superiormente y, por Axioma del Supremo, $A + B$ tiene supremo. Además, tenemos que como C es acotado, posee supremo. Por definición de supremo, tenemos que $(\forall z \in C)$ $z \leq \sup C$, y por lo tanto

$$(\forall u \in A + B) \quad u \leq \sup C.$$

De donde concluimos que $\sup C$ es cota superior de $A+B$, y por definición de supremo nuevamente

$$\sup A+B \leq \sup C$$

Notando que $\sup A+B = \sup A + \sup B$ concluimos que

$$\sup A + \sup B \leq \sup C. \blacksquare$$

P7. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente y tal que su complemento es acotado inferiormente. Muestre que $\text{ínf}\, A^c = \sup A$ si y sólo si $A = (-\infty, a]$ o $A = (-\infty, a)$ con $a \in \mathbb{R}$.
Solución
Demostremos la doble implicancia, para $A = (-\infty, a)$. El caso en que $A = (-\infty, a]$ es completamente análogo y se deja como ejercicio al lector.

- $\Leftarrow$) Como sabemos que $A = (-\infty, a)$, con $a \in \mathbb{R}$, entonces A es acotado superiormente, por Axioma del Supremo, A posee supremo y, de hecho, $\sup A = a$. Además, como $A^c = [a, +\infty)$, A^c es acotado inferiormente y por Axioma del Supremo nuevamente, A^c posee ínfimo y además $\text{ínf}\, A^c = a$.

  Esto prueba que $\sup A = \text{ínf}\, A^c$.
- $\Rightarrow$) Razonemos por contradicción. Sea $a = \sup A$ que existe por ser A acotado superiormente. Supongamos que $A \neq (-\infty, a)$. Entonces, el intervalo $(-\infty, a)$ tiene por lo menos un punto que no está en A, digamos b. Notemos que no puede ser que $b \geq a$, pues en este caso $A = (-\infty, a) \setminus \{b\} = (-\infty, a)$ lo que es una contradicción con nuestro supuesto, de donde concluimos que $b < a$.

  Luego, $A^c = \{b\} \cup [a, +\infty)$ que es acotado inferiormente, lo que implica que $\text{ínf}\, A^c = b < a = \sup A$, lo que contradice el hecho que $\text{ínf}\, A^c = \sup A. \blacksquare$