MA1001 Introducción al Cálculo

Auxiliar 11: Más Sucesiones

8 de noviembre de 2022

P1. *a)* Sea (a_n) convergente a $L > 0$. Se define

$$s_n = \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n$$

Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{s_n}{(1+\frac{L}{n})^n} = 1$

b) Utilizando *a)* demuestre que s_n es convergente y calcule su limite.

P2. Calcule los siguientes límites para $a_n \to 0$

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\exp(2a_n) - 1}{a_n}$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\exp(-2a_n) - 1}{a_n}$

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\exp(-4a_n) - 1}{\ln(1 - 5a_n)}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (1 + 2a_n)^{\frac{1}{a_n}}$

P3. Para $x > 0$, calcule

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)$$

P4. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{\exp(2a_n)-1}}$, donde (a_n) es una sucesión que converge a cero.

Recomendación

1. **[Pregunta 1, Control 5 Otoño 2009, Nube Mechona]** Considere la sucesión $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por:

$$P_0 > 0, P_{n+1} = \frac{bP_n}{a + P_n}$$

donde a, b son constantes positivas.

a) (1,0 pto.) Demuestre que si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, los únicos valores posibles de su límite son 0 y $b - a$.

b) (2,0 ptos.) Pruebe que si $a > b$, entonces $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y converge a 0.

c) (3,0 ptos.) Suponga ahora que $a < b$ y $0 < P_0 < b - a$.

- Pruebe que $0 < P_n < b - a, \forall n \in \mathbb{N} yque (P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente.
- Determine $\imath m_{n\to\infty} P_n$.