MA1001 - Introducción al Cálculo
Módulo de Ejercicios

Módulo de Ejercicios 6

16 de octubre de 2022

P1. Demuestre que para cualquier par de números $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene lo siguiente

$$\cos(x+y) = 0 \Rightarrow \sin(x+2y) = \sin(x)$$

P2. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Verifique las siguientes identidades

a) $2\sin(\alpha)\cos(\beta) = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$

b) $\cos^2(\alpha) = \dfrac{1+\cos(2\alpha)}{2}$

c) $\sin^2(\alpha) = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2}$

d) $\sin(u) + \sin(v) = 2\sin(\frac{u+v}{2})\cos(\frac{u-v}{2})$

P3. Considere la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

a) Determine el conjunto más grande $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que f está bien definida en A, ceros, signos, paridad y asíntotas.

b) ¿Es f inyectiva? ¿Epiyectiva?

c) Demuestre que $\forall x_1, x_2 \in A$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{(x_1-x_2)(1+x_2x_1)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}$$

d) Utilice esto para determinar crecimientos de f.

e) Calcule $f((1,\infty))$ y pruebe que la función

$$\begin{aligned} \overline{f} :& (1,\infty) \to f((1,\infty)) \\ x \to& \overline{f}(x) := f(x) \end{aligned}$$

es biyectiva y determine su inversa.

f) Utilice todas las partes anteriores para bosquejar f.

P4. Considere la función $f(x) = \dfrac{2+\sin(3x)}{2-\cos(x)}$.

a) Determine el conjunto más grande $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que f está bien definida, ceros, periodicidad y paridad de f.

b) ¿Qué puedes decir sobre la inyectividad y epiyectividad de la función?