1a) $[0,1]$, Sea $x \in [0,1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow$ 0 es Cota inferior
1 es Cota Superior

Como $0 \in [0,1]$ y es Cota inferior $\Rightarrow$ 0 es mínimo
$\Rightarrow$ 0 es ínfimo

Como $1 \in [0,1]$ y es Cota Superior $\Rightarrow$ 1 es Máximo
$\Rightarrow$ 1 es Supremo

b) $[0,1)$, el mínimo e ínfimo son 0, de manera Análoga. Sea $x \in [0,1) \Rightarrow x < 1 \Rightarrow$ 1 es Cota Superior

No es Máximo, Supongamos que existe otro supremo

$s < 1$ y $\forall x \in [0,1)$ $x \leq s$

$\frac{s+1}{2} < 1$ y $\boxed{s < \frac{s+1}{2}, \text{ pero } \frac{s+1}{2} \in [0,1)}$

$\Rightarrow$ $\times$ pues s no sería cota superior

$\Rightarrow$ 1 es la menor Cota Superior $\Rightarrow$ $\boxed{1 \text{ es supremo}}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x^2+3x| > 4\}$

$$|x^2+3x| > 4 \iff [x^2+3x > 4] \vee [x^2+3x < -4]$$
$$\iff [x^2+3x-4 > 0] \vee [x^2+3x+4 < 0]$$
$$\iff [(x+4)(x-1) > 0] \vee [\cancel{\quad}] \qquad x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-16}}{2} \in \mathbb{C}$$
$$\iff (-\infty,-4) \cup (1,\infty) \cup \emptyset \qquad \emptyset \text{ (Siempre mayor que 0)}$$

Como son no Acotados $\Rightarrow$ No hay supremo, ni ínfimo ni máximo, ni mínimo

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x + \frac{1}{x} < 2\}$

$$x + \frac{1}{x} < 2 \iff \frac{x^2+1}{x} < 2 \iff \frac{x^2+1-2x}{x} < 0$$
$$\iff \frac{(x-1)^2}{x} < 0 \iff \boxed{x < 0}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x + \frac{1}{x} < 2\} = (-\infty, 0)$$

$\Rightarrow$ No hay ínfimo, ni mínimo

Como 0 es cota superior, pues $x \in (-\infty,0) \Rightarrow x < 0$

Suponiendo que $\exists\, \Delta < 0$ y tl que $\forall x \in (-\infty,0) \Rightarrow x \leq \Delta$

Notando que $\frac{\Delta}{2} \in (-\infty, 0)$ y $\Delta < \frac{\Delta}{2} < 0$ $\times$

$\Rightarrow$ 0 es supremo

Creado con Tiny Scanner

P2 a) $\forall x \in B \Rightarrow x \leq Sup(B)$

Sea $x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \leq Sup(B)$

$\Rightarrow Sup(B)$ es Cota Superior de A y

Como $Sup(A)$ es la menor de las cotas superiores de A

$\Rightarrow Sup(A) \leq Sup(B)$

~~PD~~ b) $-A = \{ y \in \mathbb{R} \mid y = -x, x \in A \}$

~~Dem~~ Sea $x \in A \Rightarrow -x \in -A \Rightarrow Inf(-A) \leq -x$

$\Rightarrow -Inf(-A) \geq x$

$\Rightarrow -Inf(-A)$ es Cota Superior de A

$\Rightarrow -Inf(-A) \geq Sup(A)$, pues es la menor de las cotas superiores de A

Sea $y \in -A \Rightarrow -y \in A \Rightarrow -y \leq Sup(A)$

$\Rightarrow y \geq -Sup(A)$

$\Rightarrow -Sup(A)$ es Cota inferior de $-A$

$\Rightarrow -Sup(A) \leq Inf(-A) \Rightarrow Sup(A) \geq -Inf(-A)$

$\Rightarrow \boxed{-Inf(-A) = Sup(A)}$

Creado con Tiny Scanner

P3/ a) $A \cup B = \mathbb{R}$, b) Todo elemento de A es menor que todo de B

Como B es no vacío $\exists b_1 \in B$

$\Rightarrow \forall x \in A$, $x \leq b_1$

y A no vacío $\xRightarrow{\text{Ax Sup}} \exists\ s = \sup(A)$

$\Rightarrow \forall x \in A$, $x \leq \sup(A)$

Sea $y \in B \Rightarrow y$ es cota superior de A

$\Rightarrow \sup(A) \leq y$, pues es la menor cota superior de A

$\Rightarrow \forall x \in A, \forall y \in B \Rightarrow x \leq \underbrace{\sup(A)}_{\text{o el } \alpha} \leq y$

Suponiendo que existen α_1, α_2 tales que

$\forall x \in A, \forall y \in B \Rightarrow x \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq y$

$\Rightarrow x \leq \alpha_1 < \boxed{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}} < \alpha_2 \leq y$

$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} \in A$ o $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} \in B$

Caso 1 $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} \in A \Rightarrow \alpha_1 <$ Alguno en A $\ast$

Caso 2 $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} \in B \Rightarrow \alpha_2 >$ Alguno en B $\ast$

Como $A \cup B = \mathbb{R} \Rightarrow \times$

$\Rightarrow \alpha$ es único

$\boxed{P4}$ Suponer que $\sqrt{5}$ es racional

$\Rightarrow \exists\, p, q \in \mathbb{N}$ primos relativos

$\sqrt{5} = \frac{p}{q} \Rightarrow 5 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow q^2 \cdot 5 = p^2 \Rightarrow p^2/5$

divisible por 5

$\Rightarrow p$ es divisible por 5

$\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ tal que $5n = p \Rightarrow q^2 = 5n^2$

$\Rightarrow q^2$ es divisible por 5

$\Rightarrow q$ es divisible por 5

$\times$ pues q y p son primos relativos