MA1001 Introducción al Cálculo

Auxiliar 8: Axioma del Supremo

11 de octubre de 2022

P1. Para cada uno de los siguientes conjuntos determine su acotamiento, la existencia de ínfimos y supremos y la existencia de mínimos y máximos.

a) $[0, 1]$

b) $[0, 1)$

c) $\{x \in \mathbb{R} | |x^2 + 3x| > 4\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} | x + \frac{1}{x} < 2\}$

P2. Sean A y B subconjuntos acotados y no vacíos de $\mathbb{R}$, pruebe las siguientes propiedades:

a) Si $A \subseteq B$, $\sup(A) \leqslant \sup(B)$

b) $\sup(A) = -\inf(-A)$

P3. Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$, los cuales verican las siguientes propiedades:

a) $A \cup B = \mathbb{R}$.

b) Todo elemento de A es menor que todo en B.

Demuestre que existe un real α que es simultáneamente cota superior de A y cota inferior de B. Pruebe, además, que dicho número real α es único.

P4. Demuestre que $\sqrt{5}$ es irracional.

Recuerdos y Consejos

Definición (Supremo) Diremos que un conjunto A posee supremo, si existe un real s que satisface las siguientes condiciones:
1. s es una cota superior de A.
2. Cualquier otra cota superior de A es mayor que s.
Al real s, lo llamaremos supremo de A y se denotara por $supA$.
Definición (Ínfimo) Diremos que un conjunto A posee ínfimo, si existe un real u que satisface las siguientes condiciones:
1. u es una cota inferior de A.
2. Cualquier otra cota inferior de A es menor que u.
Al real u, lo llamaremos ínmo de A y se denotara por $\acute{\imath}nfA$.
Axioma 8. (Axioma del Supremo) Todo conjunto no vacío y acotado superiormente posee un supremo.
Definición (Máximo) Diremos que un conjunto A posee máximo, si posee una cota superior que pertenece al conjunto.
Definición (Mínimo) Diremos que un conjunto A posee mínimo, si posee una cota inferior que pertenece al conjunto.
Teorema(Propiedad Arquimediana). El conjunto $\mathbb{R}$ es arquimediano, es decir, para todo real $x > 0$, existe un natural $n \in \mathbb{N}$, tal que $nx > 1$.