MA1001-1 Introducción al Cálculo
Profesor: Sebastián Donoso
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 5: Funciones

20 de septiembre de 2022

P1. Sea f una función de variable real definida como $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$

a) Encontrar Dominio, ceros y paridad de f

b) Demostrar que $\forall y > 0$, existe $x \in (0,1)$ tal que $y = f(x)$.
Usar este resultado para deducir que f restringida al dominio $(-1,1)$ es epiyectiva en $\mathbb{R}$.

P2. Sea f una función de variable real denida como $f(x) = \sqrt[851]{1-x^{2022}}$

a) Encontrar Dominio, ceros y paridad de f

b) Estudiar el crecimiento de f y su Imagen.

P3. Considere la función $f : R \to R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|-1} & \text{si } |x| > 1 \\ [x]\sqrt{1-x^2} & \text{si } |x| \leqslant 1, \end{cases}$$

donde $[x]$ denota a la parte entera de x (el mayor número entero, menor o igual a x). Se pide:

a) Estudie el crecimiento de f por separado en los intervalos $[-1,0)$ y $[0,1]$.

b) Estudie el crecimiento de f por separado en los intervalos $(1,\infty)$ y $(-\infty,-1)$.

c) Demuestre que $\forall x \in (1,\infty)$ se cumple $f(x) > 1$.

d) Indique paridad, ceros e inyectividad de f.

e) Usando lo anterior, indique $Im(f)$ y grafique f esquematícamente, indicando los puntos importantes.

P4. Considere la función $x \to g(x) = x - [x]$, donde $[x]$ denota la función parte entera.
Determine el $dom(g)$, conjunto imagen de g, ceros de g e indique si g es una función par o impar.
Bosqueje el gráfico de g

Recuerdos y Consejos

Dominio: es el mayor conjunto A, tal que $\forall x \in A$, $f(x)$ esta bien definido.
Codominio: es el conjunto B, en el cual, $forallx \in Dom(f)$, $f(x) \in B$.
Ceros de una función: $\{x \in Dom(f)\}$ tal que $f(x) = 0$.
Conjunto Imagen: $f(A) = \{y \in \mathbb{R} | x \in A \wedge f(x) = y\}$
Función par: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$
Función impar: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f(-x)$
Monotonía de una función: f es creciente en A, si $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$ y análogo el caso de decreciente.
Función inyectiva Una función se dirá inyectiva ssi $[f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$
Función sobreyectiva Una función se dirá sobreyectiva ssi recorrido$= Im(f)$.
Biyectiva Si se cumple que f es inyectiva y epiyectiva, se dirá biyectiva.