MA1001-1 Introducción al Cálculo
Profesor: Sebastián Donoso
Auxiliares: Vicente Salinas
Dudas: vicentesalinas@ing.uchile.cl

Auxiliar 1: Axiomas

16 de agosto de 2022

P1. Dadas las siguientes secuencias de igualdades, determine los axiomas y las propiedades que las hacen correctas: Dados $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a(a+b)+b(a+b)\\ &= a^2+ab+ba+b^2\\ &= a^2+ab+ab+b^2\\ &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

P2. Usando los axiomas de cuerpo de los reales y teoremas de unicidad de neutros e inversos, demuestre las siguientes propiedades:

a) Unicidad del elemento multiplicativo

b) $-(ab) = a(-b)$

c) $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$

d) $(ab) \neq 0 \Rightarrow (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

P3. Usando sólo los axiomas de los números reales y teoremas de unicidad de neutros e inversos:
i) Demostrar que si $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $a+b=1$, entonces el inverso multiplicativo de ab es $a^{-1}+b^{-1}$.

ii) Sea $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $b, c \neq 0$, entonces:

$$(ab^{-1}+c^{-1})[(bc)(ac+b)^{-1}] = 1$$

P4. Sea C un conjunto de números reales que satisface las siguientes propiedades (axiomas):
(A1): $2 \in C$
(A2): Si $x \in C$, entonces $3x+1 \in C$
(A3): Si $x, y \in C$, entonces $x+y \in C$
(A4): $3 \notin C$

Demuestre las siguientes propiedades indicando qué axiomas, ya sea de los números reales o los recién mencionados.

(a) $9 \in C$
(b) $1 \notin C$
(c) Si $x \in C$, entonces $2x \in C$
(d) Si $x, y \in C$, entonces $3x+1+3y \in C$
(e) Si $x \in C$, entonces $-x \notin C$

Recuerdos y Consejos

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$
Axioma de Conmutatividad

$$x + y = y + x \qquad\qquad xy = yx$$

Axioma de Asociatividad

$$(x + y) + z = x + (y + z) \qquad\qquad (xy)z = x(yz)$$

Axioma de Asociatividad

$$(x + y) + z = x + (y + z) \qquad\qquad (xy)z = x(yz)$$

Axioma de Distributividad

$$x(y + z) = xy + xz \qquad\qquad (x + y)z = xz + yz$$

Axioma de Existencia de Elemento Neutro

$$\exists e_1 \in \mathbb{R}, x + e_1 = x \qquad\qquad \exists e_2 \in \mathbb{R} - \{e_1\}, \quad xe_2 = x$$

Axioma de Existencia de Inverso

$$\exists(-x) \in \mathbb{R}, x + (-x) = e_1 \qquad\qquad \exists(x^{-1}) \in \mathbb{R} - \{e_1\}, \quad x(x^{-1}) = e_2$$

Releer las demostraciones de la semana, en especial las de propiedades como por ejemplo la absorción del 0 y unicidad de elementos inversos.

Hacer los ejercicios de la guía de problemas semana 1, recuerden que cualquier duda puede consultar las soluciones en la nuble mechona, en la seccion de apuntes →pauta apunte, si no entienden parte del desarrollo consultarme :D.