Microeconomía Avanzada

Auxiliar 8

Marcelo Gómez R.

FCFM
Universidad de Chile

Primavera 2022

Pregunta 1

Considere un juego entre dos compradores. Cada jugador ofrece un precio por un bien, $b_i \geq 0$, $i = 1, 2$. Los precios son observados y el comprador con el mayor precio es declarado el ganador. Si hay un empate el jugador 1 es declarado ganador. El jugador que gana compra el bien por el precio que ofreció y el que no gana no paga nada. Haremos los siguientes supuestos:

(1) Los tipos de los compradores (las valoraciones por el bien) θ_1, θ_2 son sacados independientemente de una distribución uniforme en $[0, 1]$.

(2) El precio que ofrece i es de la forma $b_i(\theta_i) = \alpha_i \theta_i$, donde $\alpha_i \in (0, 1]$. Esto implica que el jugador i ofrece una fracción α_i de su valoración. Cada jugador conoce lo anterior.

Pregunta 1

(a) Plantee el problema de cada jugador, derive las condiciones óptimas y verifique que el perfil de estrategias propuesto $b_i(\theta_i) = \theta_i^2/2$ es equilibrio Nash-Bayesiano.

(b) Muestre que la utilidad esperada del subastador es $1/3$.

Pregunta 1

(a) Plantee el problema de cada jugador, derive las condiciones óptimas y verifique que el perfil de estrategias propuesto $b_i(\theta_i) = \theta_i^2/2$ es equilibrio Nash-Bayesiano.

Solution

El problema del comprador 1 es maximizar su utilidad:

$$\max_{b_1 \geq 0} (\theta_1 - b_1) P\{b_2(\theta_2) \leq b_1\}$$

Como el precio que ofrece el jugador 2 es $b_2(\theta_2) = \alpha_2 \theta_2$ *y* $\theta_2 \in [0, 1]$, *entonces* $\max\{b_2(\theta_2)\} = \alpha_2$*.Adicionalmente,*

$$\begin{aligned} P\{b_2(\theta_2) \leq b_1\} &= P\{\alpha_2 \theta_2 \leq b_1\} \\ &= P\left\{\theta_2 \leq \frac{b_1}{\alpha_2}\right\} \\ &= \frac{b_1}{\alpha_2} \end{aligned}$$

Pregunta 1

(a) Plantee el problema de cada jugador, derive las condiciones óptimas y verifique que el perfil de estrategias propuesto $b_i(\theta_i) = \theta_i^2/2$ es equilibrio Nash-Bayesiano.

Solution

Esto dado que una función que distribuye U[0,1] cumple $F(\theta) = \theta$ *para* $\theta \in [0,1]$*.Como el jugador conoce esto, tenemos que* $b_1 \in [0, \alpha_2]$*.Por ende, ahora el problema es,*

$$\max_{b_1 \in [0,\alpha_2]} (\theta_1 - b_1)\frac{b_1}{\alpha_2}$$

Para encontrar una solución interior, usamos la CPO:

$$\frac{\theta_1}{\alpha_2} - 2\frac{b_1}{\alpha_2} = 0 \implies b_1 = \frac{\theta_1}{\alpha_2}\frac{\alpha_2}{2} = \frac{\theta_1}{2}$$

Pregunta 1

(a) Plantee el problema de cada jugador, derive las condiciones óptimas y verifique que el perfil de estrategias propuesto $b_i(\theta_i) = \theta_i^2/2$ es equilibrio Nash-Bayesiano.

Solution

De esta forma,

$$b_1(\theta_1) = \begin{cases} \frac{\theta_1}{2} & si\ \frac{\theta_1}{2} \leq \alpha_2 \\ \alpha_2 & si\ \frac{\theta_1}{2} > \alpha_2 \end{cases}$$

Análogamente:

$$b_2(\theta_2) = \begin{cases} \frac{\theta_2}{2} & si\ \frac{\theta_2}{2} \leq \alpha_2 \\ \alpha_1 & si\ \frac{\theta_2}{2} > \alpha_1 \end{cases}$$

Pregunta 1

(a) Plantee el problema de cada jugador, derive las condiciones óptimas y verifique que el perfil de estrategias propuesto $b_i(\theta_i) = \theta_i^2/2$ es equilibrio Nash-Bayesiano.

Solution

Supongamos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$*.Entonces, tendremos que* $b_1(\theta_1) = \frac{\theta_1}{2}\ \forall \theta_1 \in \Theta_1$ *y* $b_2(\theta_2) = \frac{\theta_2}{2}\ \forall \theta_2 \in \Theta_2$*.*

Esto es, $\left(\frac{\theta_1}{2}, \frac{\theta_2}{2}\right)\ \forall \theta_1 \in \Theta_1, \theta_2 \in \Theta_2$ *es un equilibrio de Nash Bayesiano cuando* $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$*.*

Pregunta 1

(b) Muestre que la utilidad esperada del subastador es $1/3$.

Solution

Recordemos que $Eu(x,y) = \int\int u(x,y)f(x,y)dxdy$*.En este caso, la utilidad esperada del subastador es,*

$$
\begin{aligned}
E\,\text{máx}\left\{\frac{v_1}{2},\frac{v_2}{2}\right\} &= \int_0^1\int_0^1 \text{máx}\left\{\frac{v_1}{2},\frac{v_2}{2}\right\} dv_1 dv_2 \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\int_0^{v_2} v_2 dv_1 + \int_{v_2}^1 v_1 dv_1\right] dv_2 \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[v_2^2 + \frac{v_1^2}{2}\Big|_{v_2}^1\right] dv_2
\end{aligned}
$$

Pregunta 1

(b) Muestre que la utilidad esperada del subastador es $1/3$.

Solution

$$
\begin{aligned}
E \max\left\{\frac{v_1}{2}, \frac{v_2}{2}\right\} &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(v_2^2 + \frac{1}{2} - \frac{v_2^2}{2}\right) dv_2 \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \frac{v_2^2}{2}\right) dv_2 \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{v_2^3}{3}\bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Pregunta 2

Suponga que existen dos firmas 1 y 2. La firma 1 produce un producto x_1 mientas que la firma 2 produce un producto x_2 o y_2. El producto x_2 es similar al producto x_1 y el y_2 es una línea diferente de producto. El producto que produce la firma 2 es información privada de la firma 2. Por lo tanto tenemos que $N = \{1, 2\}$, $\Theta_1 = \{x_1\}$, $\Theta_2 = \{x_2, y_2\}$. Cada firma debe elegir el precio del producto que produce y esta es una decisión estratégica. La compañía $i = 1, 2$ puede elegir un precio bajo a_i o alto b_i. Luego, $S_i = \{a_i, b_i\}$. Las probabilidades que otorga la compañía 1 sobre el tipo de la compañía 2 vienen dadas por $p_1(x_2) = 0,6$ y $p_1(y_2) = 0,4$. Los pagos de las firmas dadas sus decisiones son:

Cuadro 1: Pagos para x_1 y x_2

1	2	
	a_2	b_2
a_1	1,2	0,1
b_1	0,4	1,3

Pregunta 2

Cuadro 2: Pagos para x_1 y y_2

1	2	
	a_2	b_2
a_1	1,3	0,4
b_1	0,1	1,2

Obtenga un equilibrio Nash-Bayesiano

Pregunta 2

Obtenga un equilibrio Nash-Bayesiano

Solution

Derivaremos las utilidades esperadas. Denote $U_{x_1}(a_1, a_2, b_2)$: a la utilidad esperada del agente tipo x_1 (pertenece al jugador 1) cuando este juega a_2 y el tipo x_2 e y_2 del jugador 2 juegan a_2 y b_2 respectivamente.

En este caso, la utilidad esperada sería,

$$U_{x_1}(a_1, a_2, b_2) = p_1(x_2)u(x_1, x_2, a_1, a_2) + p_1(y_2)u(x_1, y_2, a_1, b_2)$$

Ahora, las utilidades esperadas del jugador 1 tipo x_1,

$$\begin{aligned}
U_{x_1}(a_1, a_2, b_2) &= 0{,}6 \cdot 1 + 0{,}4 \cdot 0 = 0{,}6 \\
U_{x_1}(a_1, b_2, a_2) &= 0{,}6 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot 1 = 0{,}4 \\
U_{x_1}(b_1, a_2, b_2) &= 0{,}6 \cdot 0 + 0{,}4 \cdot 1 = 0{,}4 \\
U_{x_1}(b_1, b_2, a_2) &= 0{,}6 \cdot 1 + 0{,}4 \cdot 0 = 0{,}6
\end{aligned}$$

Pregunta 2

Obtenga un equilibrio Nash-Bayesiano

Solution

Las utilidades esperadas de los tipos x_2 e y_2:

$$\begin{aligned} U_{x_2}(a_1, a_2, b_2) &= 2 \\ U_{x_2}(a_1, b_2, b_2) &= 1 \\ U_{y_2}(a_1, a_2, b_2) &= 4 \\ U_{y_2}(a_1, a_2, a_2) &= 3 \end{aligned}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} U_{x_1}(a_1, a_2, b_2) &> U_{x_1}(b_1, a_2, b_2) \\ U_{x_2}(a_1, a_2, b_2) &> U_{x_2}(a_1, b_2, b_2) \\ U_{y_2}(a_1, a_2, b_2) &> U_{y_2}(a_1, a_2, a_2) \end{aligned}$$

Pregunta 2

Obtenga un equilibrio Nash-Bayesiano

Solution

Por lo tanto, el perfil (a_1, a_2, b_2) *jugados por* x_1, x_2 *e* y_2 *respectivamente es un equilibrio Nash-Bayesiano del juego.*

Pregunta 3

Considere un principal que está contratando un agente, este agente puede poner esfuerzo alto (e_H) o bajo (e_L) a su trabajo. Si el agente pone esfuerzo alto, el producto es $y_H = 18$ con probabilidad $3/4$ e $y_L = 1$ con probabilidad $1/4$. Si el agente pone esfuerzo bajo, el producto es $y_H = 18$ con probabilidad $1/4$ e $y_L = 1$ con probabilidad $3/4$. El principal le paga al agente w.

La utilidad del agente es $\sqrt{w} - c(e)$, donde $c(e_H) = 0{,}1$ y $c(e_L) = 0$. La utilidad de reserva del agente es 0.1. El principal maximiza los beneficios esperados.

Pregunta 3

(a) Suponga que primero el principal puede observar el esfuerzo del agente. Queremos encontrar el contrato óptimo. En este caso, el principal paga un sueldo $w(e)$ que puede depender del esfuerzo. Para resolver el problema primero estudiamoss el caso en que el principal implemente esfuerzo alto e_H. Resuelva,

$$\max_{w} \frac{3}{4}18 + \frac{1}{4}1 - w \qquad s.t. \ \sqrt{w} - c(e_H) \geq 0{,}1$$

Argumente por qué la restricción es satisfecha con igualdad y resuelva para w^*. Encuentre los beneficios esperados $E\pi_H$.

(b) Seguimos en el caso de *no hidden action*. Suponga que el principal quiere implementar el esfuerzo bajo e_L. Muestre el problema de maximización y resuelva para w^*. Encuentre los beneficios esperados en este caso $E\pi_L$ y compare. El mayor es el contrato escogido y por ende la acción implementada.

Pregunta 3

(c) Ahora considere el caso de hidden action. Los salarios solo pueden ser función de los productos: w_H cuando $y = y_H$ y w_L cuando $y = y_L$. Estudiamos el caso en dos etapas. Suponga que el principal primero quiere implementar e_H. Estudiamos el comportamiento óptimo luego de firmar el contrato. Escriba la desigualdad que indica bajo qué condición el agente prefiere realizar e_H a e_L (restricción de compatibilidad de incentivos). Luego escriba la condición bajo la cual el agente prefiere el contrato ofrecido a la utilidad de reserva 0.1 (restricción de racional individual).

(d) Argumente que ambas desigualdades se cumplen con igualdad. Resuelva para encontrar w_L^* y w_H^*. Compute los beneficios del principal implementando esfuerzo alto bajo hidden action $E\pi_H^{HA}$.

Pregunta 3

(e) Ahora, suponga que el principal quiere que el agente ejerza e_L. En este caso, no hay que preocuparse que el agente se desvíe al esfuerzo alto, dado que tomaría más esfuerzo. El principal pagará un salario fijo w. Escriba la restricción de racionalidad individual si toma la acción e_L y el pago es w. Menciona por qué la restricción se cumple con igualdad y úsela para derivar w^*. Compute los beneficios del principal tras implementar la acción de bajo esfuerzo $E\pi_L^{HA}$

(a) Argumente por qué la restricción es satisfecha con igualdad y resuelva para w^*. Encuentre los beneficios esperados $E\pi_H$.

Solution

El principal no pagará un salario mayor que w, puesto que bajaría los beneficios esperados del principal.La solución implica que,

$$\sqrt{w} - 0{,}1 = 0{,}1 \implies w = 4/100$$

Por tanto, el beneficio esperado,

$$E\pi = \frac{55}{4} - \frac{4}{100}$$

Pregunta 3

(b)

Solution

La restricción de racionalidad individual ahora es $\sqrt{w} - c(e_L) = 0{,}1 o$ $\sqrt{w} = 0{,}1$, *lo que implica* $w = 1/100$.

Los beneficios esperados,

$$E\pi = \frac{1}{4}18 + \frac{3}{4}1 - w = \frac{21}{4} - \frac{1}{100}$$

Pregunta 3

(c)

Solution

En el caso de hidden action, el principal no puede forzar una acción en particular. Solo puede pagar como función del producto observable y_L o y_H. El agente prefiere la acción e_H a la acción e_L si,

$$\frac{3}{4}\sqrt{w_H} + \frac{1}{4}\sqrt{w_L} - c(e_H) \geq \frac{1}{4}\sqrt{w_H} + \frac{3}{4}\sqrt{w_L} - c(e_L)$$

Si se sostiene la condición, la utilidad esperada de poner esfuerzo alto es mayor que la utilidad esperada de poner esfuerzo bajo. Entonces, el agente escogerá poner esfuerzo alto.

(d)

Solution

El agente prefiere ejercer esfuerzo alto a la utilidad de reserva si:

$$\frac{3}{4}\sqrt{w_H} + \frac{1}{4}\sqrt{w_L} - c(e_H) \geq 0{,}1$$

La restricción de racionalidad individual será satisfecha con igualdad porque sino el principal podría bajar w_L y aumentar sus beneficios. De esta forma,

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}\sqrt{w_H} + \frac{1}{4}\sqrt{w_L} - c(e_H) &= \frac{1}{4}\sqrt{w_H} + \frac{3}{4}\sqrt{w_L} - c(e_L) \\ \frac{3}{4}\sqrt{w_H} + \frac{1}{4}\sqrt{w_H} - c(e_H) &= 0{,}1 \end{aligned}$$

(d)

Solution

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos,

$$(w_L^*, w_H^*) = (1/400, 25/400)$$

Los beneficios esperados,

$$E\pi = \frac{55}{4} - \frac{3}{4}\frac{25}{400} - \frac{1}{4}\frac{1}{400} = \frac{55}{4} - \frac{19}{400}$$

Pregunta 3

(e)

Solution

Si el agente quiere implementar e_L, pagará un salario constante para todos.La restricción de racionalidad individual,

$$\frac{1}{4}\sqrt{w} + \frac{3}{4}\sqrt{w} - c(e_L) \geq 0{,}1$$

La desigualdad es satisfecha con igualdad porque de otra forma el principal podría disminuir w y aumentar sus beneficios. Sigue que, $w^* = 1/100$*.Los beneficios esperados,*

$$E\pi = \frac{1}{4}18 + \frac{3}{4}1 - \frac{1}{100} = \frac{21}{4} - \frac{1}{100}$$

(e)

Solution

Los beneficios de implementar esfuerzo alto son mayores que implementar esfuerzo bajo. Por ende, el principal escoge el contrato de esfuerzo alto.

$$\frac{55}{4} - \frac{19}{400} > \frac{21}{4} - \frac{1}{100}$$

Pregunta 4

Considere la siguiente subasta donde todos pagan con dos postores privados observando su valoración por el objeto. Las valoraciones están distribuidos uniformemente $v_i \sim U[0,1]$. El jugador que proponga la mayor oferta se gana el objeto, pero todos los jugadores deben pagar la apuesta que hicieron. Encuentre la estrategia de oferta óptima, tomando en cuenta que es de la forma $b_i(v_i) = m \cdot v_i^2$, donde $m > 0$ es una constante.

Pregunta 4

Encuentre la estrategia de oferta óptima, tomando en cuenta que es de la forma $b_i(v_i) = m \cdot v_i^2$, donde $m > 0$ es una constante.

Solution

La utilidad esperada del apostador i cuando oferta x pesos es,

$$EU_i(x|v_i) = prob(win) \cdot v_i - x$$

Donde, si gana, el jugador i gana el objeto (que valora en v_i), pero paga x independiente si gana o pierde la subasta.

Si el jugador i apuesta x usando la función $x = mv_i^2$, podemos recuperar la valoración v_i tal que $v_i = \sqrt{\frac{x}{m}}$.Así, como $v_i \sim U[0,1]$, la probabilidad de ganar es,

$$P(v_j < v_i) = P\left(v_j < \sqrt{\frac{x}{m}}\right) = \sqrt{\frac{x}{m}}$$

Pregunta 4

Encuentre la estrategia de oferta óptima, tomando en cuenta que es de la forma $b_i(v_i) = m \cdot v_i^2$, donde $m > 0$ es una constante.

Solution

Por tanto, la utilidad esperada es,

$$EU_i(x|v_i) = \sqrt{\frac{x}{m}} \cdot v_i - x$$

Tomando la CPO:

$$-1 + \frac{v_i \sqrt{\frac{x}{m}}}{2x} = 0 \implies x = \frac{v_i^2}{4m}$$

Entonces, la función óptima de oferta de i es,

$$b_i(v_i) = \frac{v_i^2}{4m}$$