Microeconomía Avanzada

Auxiliar 3

Marcelo Gómez R.

FCFM
Universidad de Chile

Primavera 2022

Pregunta 1

Considere una economía de intercambio con dos consumidores $i = 1, 2$ y L bienes. Las preferencias del agente i están representadas por la función de utilidad:

$$u^i(x) = \prod_{k=1}^{L}(1 + x_k)$$

por cada $x \in \mathbb{R}^L_+$.

(1) Suponga que la dotación inicial es un vector dado por $e^1 = e^2 = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^L$. Pruebe que la dotación inicial es Pareto Eficiente.

(2) Encuentre un equilibrio competitivo dada esta dotación y, pruebe además que no existe otro.

Pregunta 1

(1) Suponga que la dotación inicial es un vector dado por $e^1 = e^2 = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^L$. Pruebe que la dotación inicial es Pareto Eficiente.

Solution

Tomemos una transformación monótona creciente de la función de utilidad,

$$u^i(x) = \prod_{k=1}^{L}(1 + x_k) \iff \tilde{u}^i(x) = \sum_{k=1}^{L} ln(1 + x_k)$$

Como la función de utilidad es diferenciable, una asignación de equilibrio está definida por la igualdad de las TMS entre agentes, es decir,

$$\frac{Umg_i^1}{Umg_j^1} = \frac{Umg_i^2}{Umg_j^2} \tag{1}$$

Pregunta 1

(1) Suponga que la dotación inicial es un vector dado por $e^1 = e^2 = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^L$. Pruebe que la dotación inicial es Pareto Eficiente.

Solution

Tenemos que $\frac{\partial \tilde{u}^k(x)}{\partial x_i} = \frac{1}{1+x_i}$ *para todo* $i \in \{1, \ldots, L\}$ *y* $k \in \{1, 2\}$.*Evaluando la dotación inicial, obtenemos* $Umg_i^k = \frac{1}{2}$. *Reemplazando en* (1)*:*

$$\frac{1/2}{1/2} = \frac{1/2}{1/2}$$

Pregunta 1

(2) Encuentre un equilibrio competitivo dada esta dotación y, pruebe además que no existe otro.

Solution

El agente maximiza su TMS a los precios relativos, tal que,

$$\frac{1+x_l}{1+x_1} = \frac{p_1}{p_l} \iff (1+x_l)p_l = (1+x_1)p_1 \tag{2}$$

Por otro lado, la rest. presupuestaria de los agentes nos dice que $p \cdot x = p \cdot e^i$ *para* $i \in \{1,2\}$*.Si sumamos* (2) *sobre* $l = 1, \ldots, L$*,*

$$\begin{aligned} \sum_l (1+x_l)p_l &= L(1+x_1)p_1 \\ \sum_l p_l + \underbrace{\sum_l p_l x_l}_{=\sum_l p_l} &= L(1+x_1)p_1 \end{aligned}$$

Pregunta 1

(2) Encuentre un equilibrio competitivo dada esta dotación y, pruebe además que no existe otro.

Solution

De esta forma,

$$2\sum_{l} p_l = L(1+x_1)p_1 \implies x_1 = (2\sum_{l} p_l - Lp_1)\frac{1}{Lp_1}$$

En general, se cumple $x_i = \frac{2}{Lp_i}\sum_l p_l - 1, \forall i \in \{1,\ldots,L\}$.

Luego, en equilibrio, no debe haber exceso de demanda y como las preferencias son estric. monótonas, la demanda agregada es igual a la oferta agregada.Esto es, para todo bien i, $x_i^1 + x_i^2 = e_i^1 + e_i^2 = 2$.

Pregunta 1

(2) Encuentre un equilibrio competitivo dada esta dotación y, pruebe además que no existe otro.

Solution

Reemplazando las demandas óptimas, $x_i^1 + x_i^2$,

$$\frac{4}{Lp_1}\sum_l p_l - 2 = 2 \implies \sum_l p_l = p_i L$$

Si normalizamos el precio de $p_i = 1$,*obtenemos que,*

$$\sum_{l \neq i} p_l = L - 1$$

Esto es para todo $i \in \{1, \ldots, L\}$.*Por ende, el precio de equilibrio es* $p = (1, \ldots, 1)$.*Finalmente, el único EW es* $(p, (e^1, e^2))$.

Pregunta 2

Considere una economía de dos bienes y dos agentes con $e^1 = e^2 = (4, 4)$, $u^1(x_1, x_2) = \text{mín}(x_1, x_2)$ y $u^2(x_1, x_2) = \text{máx}(x_1, x_2)$. Muestre que no existe EW. ¿Qué supuestos del teorema de existencia visto en clases no se tienen?

Solution

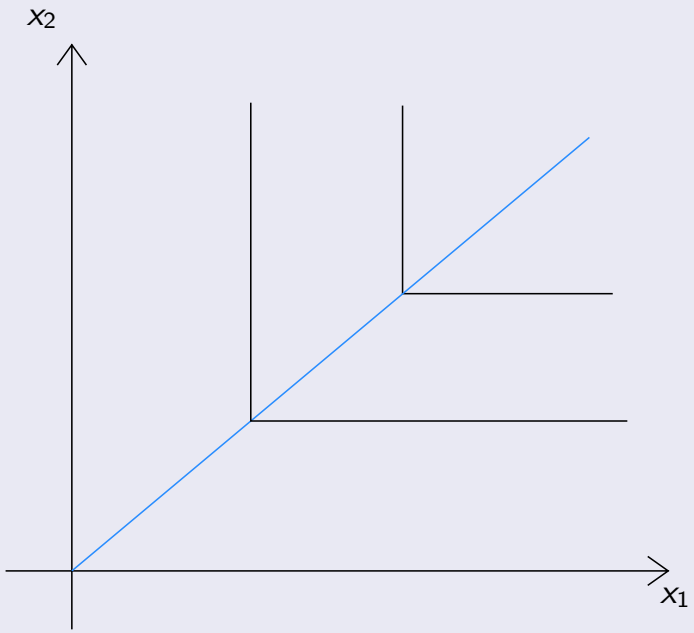

Figura 1: $u^1(x_1, x_2)$

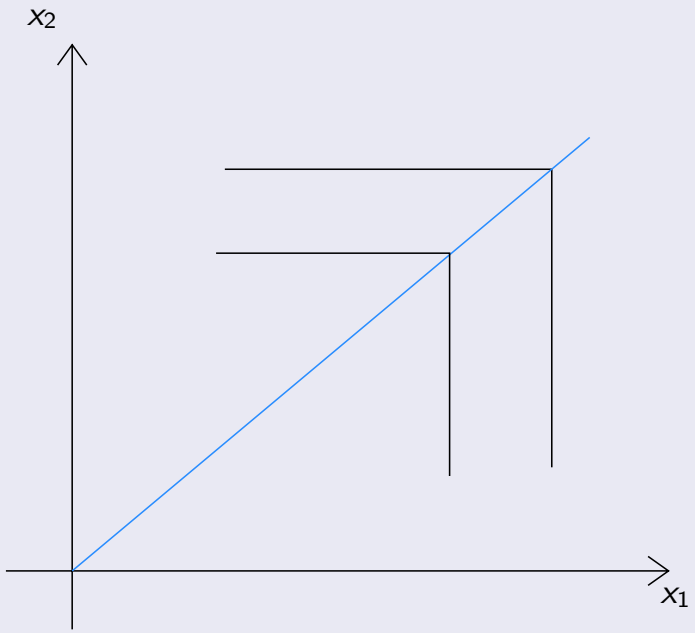

Figura 2: $u^2(x_1, x_2)$

Pregunta 2

Considere una economía de dos bienes y dos agentes con $e^1 = e^2 = (4, 4)$, $u^1(x_1, x_2) = \text{mín}(x_1, x_2)$ y $u^2(x_1, x_2) = \text{máx}(x_1, x_2)$. Muestre que no existe EW. ¿Qué supuestos del teorema de existencia visto en clases no se tienen?

Solution

El agente 1 resuelve el siguiente problema,

$$\max_{x_1, x_2 \geq 0} \; min(x_1, x_2) \quad s.a \;\; p_1 x_1 + p_2 x_2 = 4p_1 + 4p_2$$

Las demandas óptimas se obtienen cuando $x_1 = x_2$,reemplazando en la rest. presupuestaria,

$$x_1(p_1 + p_2) = 4(p_1 + p_2) \implies x_1^* = x_2^* = 4$$

Pregunta 2

Considere una economía de dos bienes y dos agentes con $e^1 = e^2 = (4, 4)$, $u^1(x_1, x_2) = \text{mín}(x_1, x_2)$ y $u^2(x_1, x_2) = \text{máx}(x_1, x_2)$. Muestre que no existe EW. ¿Qué supuestos del teorema de existencia visto en clases no se tienen?

Solution

El agente 2 resuelve,

$$\max_{x_1, x_2 \geq 0} max(x_1, x_2) \quad s.a \quad p_1 x_1 + p_2 x_2 = 4p_1 + 4p_2$$

Desde la rest. presupuestaria obtenemos que $x_2 = \frac{4(p_1+p_2)}{p_2} - \frac{x_1 p_1}{p_2}$*.Como* $x_2 \geq 0 \implies \frac{4(p_1+p_2)}{p_1} \geq x_1 \geq 0$*.De esta forma,*

$$\max_{4(p_1+p_2)/p_1 \geq x_1 \geq 0} max\left(x_1, \frac{4(p_1+p_2)}{p_2} - \frac{x_1 p_1}{p_2}\right)$$

Pregunta 2

Considere una economía de dos bienes y dos agentes con $e^1 = e^2 = (4, 4)$, $u^1(x_1, x_2) = \text{mín}(x_1, x_2)$ y $u^2(x_1, x_2) = \text{máx}(x_1, x_2)$. Muestre que no existe EW. ¿Qué supuestos del teorema de existencia visto en clases no se tienen?

Solution

Si tomamos el máximo valor posible de $x_1 = \frac{4(p_1+p_2)}{p_1}$, *esto implica que* $x_2 = 0$.*Por otro lado, si* $x_1 = 0$ *implica que* $x_2 = \frac{4(p_1+p_2)}{p_2}$.*De esta forma, las demandas óptimas estarán dadas por,*

$$(x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} \left(\frac{4(p_1+p_2)}{p_1}, 0\right) & \text{si } p_1 < p_2 \\ \left(0, \frac{4(p_1+p_2)}{p_2}\right) & \text{si } p_2 \leq p_1 \end{cases}$$

Esto significa que, independente de los precios, habrá exceso de demanda por alguno de los bienes,y por ende, no existirá equilibrio.

Pregunta 2

Considere una economía de dos bienes y dos agentes con $e^1 = e^2 = (4, 4)$, $u^1(x_1, x_2) = \text{mín}(x_1, x_2)$ y $u^2(x_1, x_2) = \text{máx}(x_1, x_2)$. Muestre que no existe EW. ¿Qué supuestos del teorema de existencia visto en clases no se tienen?

Solution

Notemos que u^2 *no es cóncava. Tomemos las canastas* $x = (2, 0), y = (0, 2)$ *y consideremos* $\alpha = 0{,}5$. *Entonces,*

$$max\left(\frac{1}{2}(2,0) + \frac{1}{2}(0,2)\right) = 1 < \frac{1}{2}max(2,0) + \frac{1}{2}max(0,2) = 2$$

Es decir, la función $max(\cdot, \cdot)$ *es convexa.*

Pregunta 3

Considere una economía con dos bienes y dos agentes, que está caracterizada por,

$$U^a(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \quad U^b(x,y) = \sqrt{x} + \theta\sqrt{y}, \quad w^a = (\theta, 1), \quad w^b = (1, \theta)$$

Donde $\theta \geq 0$ es un parámetro exógeno.

(1) ¿Para qué valores de θ la economía al menos tiene un eq. Walrasiano?

(2) ¿Para qué valores de θ la distribución de recursos $((\frac{1+\theta}{2}, \frac{1+\theta}{2}), (\frac{1+\theta}{2}, \frac{1+\theta}{2}))$ es Pareto eficiente?

Pregunta 3

(1) ¿Para qué valores de θ la economía al menos tiene un eq. Walrasiano?

Solution

Cuando $\theta > 0$, los consumidores tienen funciones de utilidad continuas, estric. crecientes y estric. cóncavas.Además, las asignaciones iniciales son interiores.Por ende, siempre existe al menos un equilibrio Walrasiano.

Pregunta 3

(1) ¿Para qué valores de θ la economía al menos tiene un eq. Walrasiano?

Solution

Cuando $\theta = 0$, tenemos que

$$U^a(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \quad U^b(x,y) = \sqrt{x}, \quad w^a = (0,1), \quad w^b = (1,0)$$

Podemos notar que b solo tiene interés en el bien x,por ende, demanda toda su asignación inicial de este bien. Por otro lado, el individuo a siempre demanda de ambos bienes para aumentar su utilidad.No obstante, no posee nada del bien x y el individuo b no está dispuesto a comerciar.Por esta razón, siempre existirá exceso de demanda por el bien x, y por tanto, no existe equilibrio en este caso.

Pregunta 3

(2) ¿Para qué valores de θ la distribución de recursos $((\frac{1+\theta}{2}, \frac{1+\theta}{2}), (\frac{1+\theta}{2}, \frac{1+\theta}{2}))$ es Pareto eficiente?

Solution

Como las funciones son diferenciables, la distribución Pareto eficiente estará caracterizada por la ecuación que iguala las TMS de ambos agentes, esto es,

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{x_1}}}{\frac{1}{2\sqrt{y_1}}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x_2}}}{\frac{\theta}{2\sqrt{y_2}}}$$

Si tomamos la distribución $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = \frac{1+\theta}{2} = \alpha(\theta)$, *tendremos,*

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{\alpha(\theta)}}}{\frac{1}{2\sqrt{\alpha(\theta)}}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{\alpha(\theta)}}}{\frac{\theta}{2\sqrt{\alpha(\theta)}}} \implies \theta = 1$$