# Microeconomía Avanzada

## Auxiliar 2

Marcelo Gómez R.

FCFM
Universidad de Chile

Primavera 2022

# Pregunta 1

Considere un agente que tiene utilidad de Bernoulli $u(x) = -exp(-\lambda x)$, con $\lambda > 0$.

(1) Encuentre el coeficiente de aversión absoluta al riesgo.

Suponga ahora que el equivalente cierto de una lotería que paga 1000 pesos con probabilidad $1/2$ y 0 con probabilidad $1/2$ es 470.

(2) Calcule el equivalente cierto de una lotería que paga con la misma probabilidad 1500 y 500.

# Pregunta 1

(1) Encuentre el coeficiente de aversión absoluta al riesgo.

## Solution

*El coef. de aversión absoluta al riesgo se define por* $r_A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$. *Las derivadas de la función de utilidad Bernoulli son,*

$$u'(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad u''(x) = -\lambda^2 e^{-\lambda x}$$

*Reemplazando en* $r_A$,

$$r_A(x) = -\frac{-\lambda^2 e^{-\lambda x}}{\lambda e^{-\lambda x}} = \lambda$$

# Pregunta 1

Suponga ahora que el equivalente cierto de una lotería que paga 1000 pesos con probabilidad 1/2 y 0 con probabilidad 1/2 es 470.

(2) Calcule el equivalente cierto de una lotería que paga con la misma probabilidad 1500 y 500.

## Solution

*Notemos que la información del enunciado nos dice que,*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - e^{-\lambda 1000} + \frac{1}{2} - e^{-\lambda 0} &= -e^{-\lambda 470} \\ e^{-1000\lambda} + 1 &= 2e^{-470\lambda} \end{aligned}$$

*Luego, para la segunda lotería,*

$$\begin{aligned} -e^{-1500\lambda}\frac{1}{2} + (-e^{-500\lambda})\frac{1}{2} &= e^{-\lambda CE} \\ e^{-1000\lambda} + 1 &= 2e^{(500-CE)\lambda} \end{aligned}$$

# Pregunta 1

Suponga ahora que el equivalente cierto de una lotería que paga 1000 pesos con probabilidad $1/2$ y 0 con probabilidad $1/2$ es 470.

(2) Calcule el equivalente cierto de una lotería que paga con la misma probabilidad 1500 y 500.

**Solution**

*Esto implica que,*

$$500 - CE = -470 \implies CE = 970$$

# Pregunta 2

Considere la preferencia sobre loterías de uniformidad sobre un conjunto $X$ finito:

$$p \succeq q \quad \text{ssi} \quad \sum_{x \in X} \left( p(x) - \frac{1}{|X|} \right)^2 \leq \sum_{x \in X} \left( q(x) - \frac{1}{|X|} \right)^2$$

Pruebe si es racional, si es continua y si satisface independencia.

## Solution

*Para que una preferencia sea racional, debe ser completa y transitiva. Sean* $p_1, p_2$ *dos alternativas representadas por,*

$$F(p) = \sum_{x \in X} \left( p_i(x) - \frac{1}{|X|} \right)^2 \in \mathbb{R}$$

*Siempre puedo comparar* $p_1$ *y* $p_2$*, por ende, las preferencias son completas.*

# Pregunta 2

Considere la preferencia sobre loterías de uniformidad sobre un conjunto $X$ finito:

$$p \succeq q \quad \text{ssi} \quad \sum_{x \in X} \left( p(x) - \frac{1}{|X|} \right)^2 \leq \sum_{x \in X} \left( q(x) - \frac{1}{|X|} \right)^2$$

Pruebe si es racional, si es continua y si satisface independencia.

## Solution

*Sean $p, q$ y $r$ representadas por $F(p)$. Si $p \succeq q$ y $q \succeq r$, entonces se cumple,*

$$F(p) \leq F(q) \quad y \quad F(q) \leq F(r)$$

*Por ende, $F(p) \leq F(r)$, lo que implica que $p \succeq r$. Las preferencias son transitivas. Al ser completas y transitivas, son racionales.*

# Pregunta 2

Considere la preferencia sobre loterías de uniformidad sobre un conjunto $X$ finito:

$$p \succeq q \ \text{ ssi } \ \sum_{x\in X}\left(p(x) - \frac{1}{|X|}\right)^2 \leq \sum_{x\in X}\left(q(x) - \frac{1}{|X|}\right)^2$$

Pruebe si es racional, si es continua y si satisface independencia.

## Solution

*Una preferencia es continua ssi* $\forall p, p', p''$ *con* $p \succeq p' \succeq p''$*, existe un* $\alpha \in [0,1]$ *tal que,*

$$\alpha p + (1-\alpha)p'' \sim p'$$

*Sean* $p \succ q \succ r$*, entonces,*

$$F(p) < F(q) < F(r)$$

# Pregunta 2

Considere la preferencia sobre loterías de uniformidad sobre un conjunto $X$ finito:

$$p \succeq q \quad \text{ssi} \quad \sum_{x \in X} \left( p(x) - \frac{1}{|X|} \right)^2 \leq \sum_{x \in X} \left( q(x) - \frac{1}{|X|} \right)^2$$

Pruebe si es racional, si es continua y si satisface independencia.

## Solution

*Una combinación lineal entre $p$ y $r$ es representada por,*

$$G(\alpha) = \sum_{x \in X} \left( \alpha r(x) + (1-\alpha) p(x) - \frac{1}{|X|} \right)^2$$

*Si tomamos $\alpha = 0$, equivale a $G(0) = F(p) < F(q) < F(r) = G(1)$.*

# Pregunta 2

Considere la preferencia sobre loterías de uniformidad sobre un conjunto $X$ finito:

$$p \succeq q \quad \text{ssi} \quad \sum_{x \in X} \left( p(x) - \frac{1}{|X|} \right)^2 \leq \sum_{x \in X} \left( q(x) - \frac{1}{|X|} \right)^2$$

Pruebe si es racional, si es continua y si satisface independencia.

## Solution

*Entonces,* $\exists \xi \in (0,1)$ *tal que* $G(\xi) = F(q)$, *i.e.,* $\exists \xi \in (0,1)$ *tal que,*

$$\sum_{x \in X} \left( \xi r(x) + (1-\xi) p(x) - \frac{1}{|X|} \right)^2 = \sum_{x \in X} \left( q(x) - \frac{1}{|X|} \right)^2$$

*Esto es,* $\xi r + (1-\xi) p \sim q$.

# Pregunta 2

Considere la preferencia sobre loterías de uniformidad sobre un conjunto $X$ finito:

$$p \succeq q \quad \text{ssi} \quad \sum_{x \in X} \left( p(x) - \frac{1}{|X|} \right)^2 \leq \sum_{x \in X} \left( q(x) - \frac{1}{|X|} \right)^2$$

Pruebe si es racional, si es continua y si satisface independencia.

## Solution

*Por última, las preferencias son independientes si para cualquier $p, p'$ y $p''$, donde $p \succeq p'$, tenemos que,*

$$\alpha p + (1-\alpha) p'' \succeq \alpha x' + (1-\alpha) p'' \quad \forall \alpha \in (0,1)$$

*Sea $X = \{x_1, x_2\}$. Tomemos $p = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), p = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), p'' = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ y $\alpha = \frac{1}{2}$.*

# Pregunta 2

Considere la preferencia sobre loterías de uniformidad sobre un conjunto $X$ finito:

$$p \succeq q \quad \text{ssi} \quad \sum_{x \in X} \left( p(x) - \frac{1}{|X|} \right)^2 \leq \sum_{x \in X} \left( q(x) - \frac{1}{|X|} \right)^2$$

Pruebe si es racional, si es continua y si satisface independencia.

## Solution

*Si $p \succ p'$, entonces,*

$$F(p) = 0 < F(p') = \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{8}$$

*Además,*

$$F\left( \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p'' \right) = F\left( \left( \frac{3}{8}, \frac{5}{8} \right) \right) = \left( \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{5}{8} - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{32}$$

# Pregunta 2

Considere la preferencia sobre loterías de uniformidad sobre un conjunto $X$ finito:

$$p \succeq q \quad \text{ssi} \quad \sum_{x \in X} \left( p(x) - \frac{1}{|X|} \right)^2 \leq \sum_{x \in X} \left( q(x) - \frac{1}{|X|} \right)^2$$

Pruebe si es racional, si es continua y si satisface independencia.

## Solution

$$F\left(\frac{1}{2}p' + \frac{1}{2}p''\right) = F\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right) = 0 < \frac{1}{32}$$

*Por tanto,* $\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p'' \not\succeq \frac{1}{2}p' + \frac{1}{2}p''$. *Así, las preferencias no cumplen independencia.*

# Pregunta 3

Considere la función,

$$u(c) = 1 - exp(-c^2/2)$$

Encuentre la expresión de la aversión absoluta al riesgo. ¿La persona tiene una función de utilidad aversa al riesgo?

## Solution

*En primer lugar,*

$$\begin{aligned} u'(c) &= -exp(-c^2/2)\frac{-2c}{2} \\ &= c \cdot exp(-c^2/2) \end{aligned}$$

*Además,*

$$\begin{aligned} u''(c) &= exp(-c^2/2) + c \cdot exp(-c^2/2)\frac{-2c}{2} \\ &= (1 - c^2)exp(-c^2/2) \end{aligned}$$

# Pregunta 3

Considere la función,

$$u(c) = 1 - exp(-c^2/2)$$

Encuentre la expresión de la aversión absoluta al riesgo. ¿La persona tiene una función de utilidad aversa al riesgo?

## Solution

*Por ende, el coeficiente es,*

$$-\frac{u''(c)}{u'(c)} = \frac{c^2 - 1}{c} = c - \frac{1}{c}$$

*Un agente maximizador de utilidad esperada es averso al riesgo cuando $c > 1$ y amante al riesgo cuando $c < 1$.*

# Pregunta 4

Considere una economía compuesta por dos consumidores y dos bienes, $x$ e $y$. Las utilidades de cada consumidor son $u_1 = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ y $u_2 = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ y sus respectivas dotaciones son $e_1 = (6,3)$ y $e_2 = (3,3)$. Calcule el equilibrio Walrasiano.

## Solution

*Las funciones Cobb-Douglas tienen una solución cerrada para el problema de optimización. Pensando en un modelo generalizado,* $u^i(x,y) = x^\alpha y^\beta$

$$x_i^* = \alpha \frac{p \cdot w^i}{p_x(\alpha + \beta)}$$

*Por ende, para este caso, la riqueza de los agentes son* $p \cdot w^1 = 6p_x + 3p_y$ *y* $p \cdot w^2 = 3p_x + 3p_y$*. De esta forma,*

$$x_1^* = \frac{1}{2}\frac{6p_x + 3p_y}{p_x}, \quad y_1^* = \frac{1}{2}\frac{6p_x + 3p_y}{p_y}$$

# Pregunta 4

Considere una economía compuesta por dos consumidores y dos bienes, $x$ e $y$. Las utilidades de cada consumidor son $u_1 = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ y $u_2 = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ y sus respectivas dotaciones son $e_1 = (6,3)$ y $e_2 = (3,3)$. Calcule el equilibrio Walrasiano.

## Solution

*Para el agente 2,*

$$x_2^* = \frac{1}{3}\frac{3p_x + 3p_y}{p_x}, \quad y_2^* = \frac{2}{3}\frac{3p_x + 3p_y}{p_y}$$

*Normalizamos $p_y = 1$, entonces las demandas son,*

$$D_1 = \left(\frac{6p_x + 3}{2p_x}, \frac{6p_x + 3}{2}\right)$$

$$D_2 = \left(\frac{(p_x + 1)}{p_x}, 2(p_x + 1)\right)$$

# Pregunta 4

Considere una economía compuesta por dos consumidores y dos bienes, $x$ e $y$. Las utilidades de cada consumidor son $u_1 = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$ y $u_2 = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$ y sus respectivas dotaciones son $e_1 = (6, 3)$ y $e_2 = (3, 3)$. Calcule el equilibrio Walrasiano.

## Solution

*Notemos que la dotación agregada es,* $e_1 + e_2 = (9, 6)$*. Por ende, para el bien* $x$*, vaciando los mercados,*

$$\begin{aligned} \frac{6p_x + 3}{2p_x} + \frac{(p_x + 1)}{p_x} &= 9 \\ 6p_x + 3 + 2(p_x + 1) &= 18p_x \implies p_x = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

*Reemplazando en* $D_1$ *y* $D_2$ *obtenemos que* $D_1 = \left(\frac{27}{4}, \frac{27}{10}\right), D_2 = \left(\frac{7}{2}, \frac{14}{5}\right)$*. Además,* $p = \left(\frac{2}{5}, 1\right)$