Microeconomía Avanzada

Auxiliar 1

Marcelo Gómez R.

FCFM
Universidad de Chile

Primavera 2022

Pregunta 1

Considere la siguiente función de utilidad VNM $U(w) = a + bw + cw^2$.

(1) ¿Qué restricciones deben imponerse sobre los parámetros a, b y c para que la funcione muestre aversión al riesgo?

(2) ¿Sobre qué dominio de riqueza puede una función de utilidad VNM cuadrática ser definida?

(3) Dada la loteria $L = [\frac{1}{2} \circ (w + h), \frac{1}{2} \circ (w - h)]$, donde $h > 0$. Suponga que $c \leq 0$. Muestre que $CE < E(L)$.

Pregunta 1

(1) ¿Qué restricciones deben imponerse sobre los parámetros a, b y c para que la funcione muestre aversión al riesgo?

Solution

Una función de utilidad VNM muestra aversión al riesgo ssi es una función cóncava. Esto es cierto solo si $c \leq 0$.

Pregunta 1

(2) ¿Sobre qué dominio de riqueza puede una función de utilidad VNM cuadrática ser definida?

Solution

Una función de utilidad VNM debe ser estrictamente creciente en riqueza. Por ende, el dominio válido es donde $U(w)$ es creciente. Dado que $\max U(w) = \frac{-b}{2c}$, *el dominio válido será* $(-\infty, -b/2c)$.

Pregunta 1

(3) Dada la loteria $L = [\frac{1}{2} \circ (w+h), \frac{1}{2} \circ (w-h)]$, donde $h > 0$. Suponga que $c \leq 0$. Muestre que $CE < E(L)$.

Solution

El valor esperado de la lotería L es,

$$E(L) = \frac{1}{2}(w+h) + \frac{1}{2}(w-h) = w$$

Sabemos que el equivalente cierto (CE) cumple la condición $U(CE) = U(L)$*, i.e,*

$$\begin{aligned} U(CE) = U(L) &= \frac{1}{2}(a + b(w+h) + c(w+h)^2) + \frac{1}{2}(a + b(w-h) + c(w-h)^2) \\ &= a + bw + c(w^2 + h^2) \end{aligned}$$

(3) Dada la loteria $L = [\frac{1}{2} \circ (w+h), \frac{1}{2} \circ (w-h)]$, donde $h > 0$. Suponga que $c \leq 0$. Muestre que $CE < E(L)$.

Solution

Por otro lado,

$$U(E(L)) = U(w) = a + bw + cw^2$$

Como $U(\cdot)$ es una función estrictamente creciente y $c \leq 0$, tendremos que

$$U(CE) < U(E(L))$$

Esto es equivalente a $CE < E(L)$.

Pregunta 2

Considere un agente que debe consumir 2 bienes x_1 y x_2. El objetivo de este problema es explorar si el agente prefiere o no que haya incerteza en los precios que enfrentará cuando tome su decisión de consumo. El agente tiene una riqueza fija e igual a w.

Suponga que este agente maximiza utilidad esperada y que $u(x_1, x_2) = f(x_1 + x_2)$ para alguna función f creciente. Demuestre que este agente prefiere $p = (1, 3)$ con probabilidad $1/2$ y $p' = (3, 1)$ con probabilidad $1/2$ a precios $p'' = (2, 2)$ con probabilidad 1.

Pregunta 2

Suponga que este agente maximiza utilidad esperada y que $u(x_1, x_2) = f(x_1 + x_2)$ para alguna función f creciente. Demuestre que este agente prefiere $p = (1, 3)$ con probabilidad $1/2$ y $p' = (3, 1)$ con probabilidad $1/2$ a precios $p'' = (2, 2)$ con probabilidad 1.

Solution

Denotemos por L_1 *la lotería que induce* $p = (p_{x_1}, p_{x_2}) = (1, 3)$ *con probabilidad 1/2 y* $p'(3, 1)$ *con la misma probabilidad. En el caso que* $p = (1, 3)$*, el agente resuelve el siguiente problema*

$$\max_{x_1, x_2 \geq 0} f(x_1 + x_2) \quad s.a \;\; x_1 + 3x_2 = w$$

Como $f(\cdot)$ *es una función creciente, el problema anterior es equivalente a,*

$$\max_{x_1, x_2 \geq 0} x_1 + x_2 \quad s.a \;\; x_1 + 3x_2 = w$$

Pregunta 2

Demuestre que este agente prefiere $p = (1,3)$ con probabilidad $1/2$ y $p' = (3,1)$ con probabilidad $1/2$ a precios $p'' = (2,2)$ con probabilidad 1.

Solution

Si despejamos x_2 en la rest. presupuestaria, $x_2 = \frac{w - x_1}{3}$

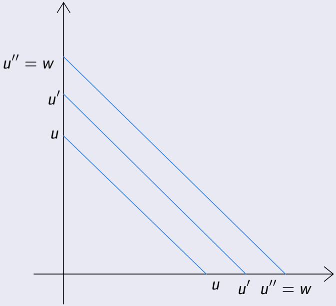

Figura 1: Indifference curves for $x_1 + x_2 = u$, with some $u > 0$.

Pregunta 2

Demuestre que este agente prefiere $p = (1, 3)$ con probabilidad $1/2$ y $p' = (3, 1)$ con probabilidad $1/2$ a precios $p'' = (2, 2)$ con probabilidad 1.

Solution

Si despejamos x_2 *en la rest. presupuestaria,* $x_2 = \frac{w - x_1}{3}$

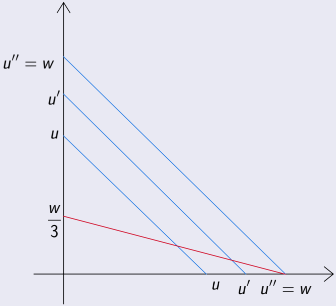

Figura 2: Equilibrium

Pregunta 2

Demuestre que este agente prefiere $p = (1, 3)$ con probabilidad $1/2$ y $p' = (3, 1)$ con probabilidad $1/2$ a precios $p'' = (2, 2)$ con probabilidad 1.

Solution

Ahora, analíticamente, reemplazando x_2 en la función objetivo,

$$\max_{x_1 \geq 0} x_1 + \frac{w - x_1}{3} = \frac{2}{3}x_1 + \frac{w}{3}$$

Como $x_2 \geq 0$ esto equivale a $\frac{w - x_1}{3} \geq 0 \implies w \geq x_1$. De esta forma,

$$\max_{0 \leq x_1 \leq w} \frac{2}{3}x_1 + \frac{w}{3}$$

Por tanto, las demandas óptimas serán $x_1^* = w$ y $x_2^* = 0$.

Pregunta 2

Demuestre que este agente prefiere $p = (1, 3)$ con probabilidad $1/2$ y $p' = (3, 1)$ con probabilidad $1/2$ a precios $p'' = (2, 2)$ con probabilidad 1.

Solution

Para el caso $p' = (3, 1)$ *se puede hacer un análisis similar, que entrega como resultado* $x_1^{**} = 0$ *y* $x_2^{**} = w$*.*

Denotaremos por L_2 *la lotería que induce* $p = (2, 2)$ *con probabilidad 1. En este caso, el agente resuelve,*

$$\max_{x_1, x_2 \geq 0} x_1 + x_2 \quad s.a \; 2x_1 + 2x_2 = w$$

Podemos notar, desde la rest. presupuestaria, que $x_1 + x_2 = w/2$*, por tanto, el problema pasa a ser,*

$$\max_{x_1, x_2 \geq 0} \frac{w}{2} = \frac{w}{2}$$

Pregunta 2

Demuestre que este agente prefiere $p = (1, 3)$ con probabilidad $1/2$ y $p' = (3, 1)$ con probabilidad $1/2$ a precios $p'' = (2, 2)$ con probabilidad 1.

Solution

Finalmente, la utilidad esperada de ambas loterías,

$$\begin{aligned} U(L_1) &= \frac{1}{2} f(x_1^* + x_2^*) + \frac{1}{2} f(x_1^{**} + x_2^{**}) \\ &= \frac{1}{2} f(w) + \frac{1}{2} f(w) = f(w) \end{aligned}$$

Para la lotería 2,

$$U(L_2) = f\left(\frac{w}{2}\right)$$

De esta forma, $U(L_2) < U(L_1)$

Pregunta 3

Un individuo tiene utilidad de Bernoulli u cóncava y una riqueza inicial w. Considere la loteria L que paga A con probabilidad p y B con probabilidad $(1-p)$, con $A > B > 0$.

(1) Suponga que el agente es dueño de la lotería. Caracterice el mínimo precio p_V al que estaría dispuesto a vender L. Ilustre gráficamente.

(2) Suponga que el agente no es dueño de la lotería. Caracterice el máximo precio p_C al que estaría dispuesto a comprar L. Ilustre gráficamente.

(3) Si la función u presenta aversión absoluta al riesgo decreciente, ¿p_V es mayor, igual o menor que p_C? Justifique matemáticamente y de una interpretación económica a su respuesta.

Pregunta 3

(1) Suponga que el agente es dueño de la lotería. Caracterice el mínimo precio t^V al que estaría dispuesto a vender L.

Solution

El agente está dispuesto a vender el billete si la utilidad cierta que obtendrá con la venta supera a la utilidad esperada de la lotería.

Por ende, p_V satisface la siguiente ecuación,

$$u(w + p_V) = pu(w + A) + (1 - p)u(w + B)$$

Otra forma de caracterizarlo es tomando $p_V = c(L, u_V)$, donde $u_V(x) = u(w + x)$.

Pregunta 3

(2) Suponga que el agente no es dueño de la lotería. Caracterice el máximo precio p_C al que estaría dispuesto a comprar L. Ilustre gráficamente.

Solution

El agente está dispuesto a comprar el billete si la utilidad esperada que obtendrá con la compra del billete supera a la riqueza inicial.

Por ende, p_C satisface la ecuación,

$$u(w) = pu(w - p_C + A) + (1 - p)u(w - p_C + B)$$

Otra forma de caracterizarlo el precio de compra es cuando el equivalente cierto es igual a la riqueza inicial. En este sentido, denotamos el eq. cierto por $c(L, u_C)$, donde $u_C(x) = u(w - p_C + x)$. Entonces, el equivalente cierto que provoca la misma utilidad que la riqueza inicial está dado por,

$$w - p_C + c(L, u_C) = w \implies p_C = c(L, u_C)$$

Pregunta 3

(3) Si la función u presenta aversión absoluta al riesgo decreciente, ¿p_V es mayor, igual o menor que p_C? Justifique matemáticamente y de una interpretación económica a su respuesta.

Solution

Si u presenta aversión absoluta al riesgo decreciente (DARA), entonces mientras más riqueza menos averso al riesgo (o más amante al riesgo) será el agente. Esto quiere decir que, si tiene más riqueza, deben "pagarle" más para que esté dispuesto a tomar el riesgo.

Esto es, el equivalente cierto de vender será mayor al equivalente cierto de comprar. Lo anterior sucede puesto que al ser dueño del billete, el agente tiene más riqueza que cuando debe comprarlo.

Pregunta 3

(3) Si la función u presenta aversión absoluta al riesgo decreciente, ¿p_V es mayor, igual o menor que p_C? Justifique matemáticamente y de una interpretación económica a su respuesta.

Solution

Desde los item anteriores, notamos que los precios pueden caracterizarse por,

$$p_V = c(L, u_V)$$
$$p_C = c(L, u_C)$$

Por lo tanto, $p_C = c(L, u_C) < c(L, u_V) = p_V$.

Pregunta 4

Suponga que la función u es *más cóncava* que v. Demuestre que, $c(F, u) \leq c(F, v)$ para todo F, es equivalente a que exista una función cóncava creciente g tal que $u(x) = g(v(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solution

Como las funciones de utilidad son monótonas crecientes necesariamente existe una función g tal que $u = g \circ v$.

Por hipótesis, $c(F, u) \leq c(F, v)$, la desigualdad no cambia al evaluar sobre la función compuesta u,

$$g(v(c(F, u))) \leq g(v(c(F, v)))$$

Pregunta 4

Solution

Tenemos que
$g(v(c(F,u))) = u(c(F,u)) = \int u(x)dF(x) = \int g(v(x))dF(x).$

Por otro lado, $v(c(F,v)) = \int v(x)dF(x)$*. Entonces,*

$$\int g(v(x))dF(x) \leq g\left(v(x)dF(x)\right) \quad \forall F$$

Finalmente, la desigualdad de Jensen nos dice que se cumple ssi g *es cóncava.*