Diseño de mecanismos y licitaciones

Juan F. Escobar

Universidad de Chile

Diseño de mecanismos

- Diseño de mecanismos: Como diseñamos reglas/juegos/mecanismos para llegar a ciertos resultados.
  - Premios Nobel: Milgrom, Wilson, Vickrey, Myerson, Maskin, Hurwicz.
- Diseño de mercados: Similar a diseño de mecanismos, pero pone más enfasis en detalles institucionales/tecnológicos y menos foco en precios.
  - Premios Nobel: Roth, Shapley.
- Licitaciones exceden el ámbito de la Economía: Investigación de Operaciones, Finanzas, Ciencias de la Computación.
- Licitaciones:
  - Teoría: Teoría de juegos y teoría microeconómica, optimización, aproximación, teoria de juegos algorítmica.
  - Empiria: Econometría estructural, organización industrial, experimentos de campo, análisis de datos.
  - Aplicaciones: espectro radioeléctrico, recursos naturales, transporte, energía-

Ejemplo

- Vendedor quiere vender un bien.
- Dos potenciales compradores $i = 1, 2$.
- Compradores tienen información privada: Cada comprador valora el bien en $v_i \in [0, 1]$.
- $U_i = v_i - p_i$ si obtiene el bien
- Cada comprador i conoce v_i, pero el resto no.
- Desde la perspectiva del resto (rival a i y vendedor), v_i se distribuye de acuerdo a distribución F_i.
- En ejemplos, supondre que $F_1 = F_2 = F = U[0, 1]$.
- Cómo debiese vender el vendedor que quiere maximizar su ingreso esperado?
- Problema es trivial si (a) información es pública; ó (b) información es privada y compradores no responden a incentivos.

Un primer mecanismo: Negociación

- Vendedor negocia con comprador 1 y se olvida del comprador 2.
- Vendedor pide precio p a comprador 1.
- Comprador compra ssi $v_1 \geq p$
- Mejor mecanismo: $p^* \in \arg\max_{p \geq 0} p(1 - F(p))$. Tradeoff?
- Caso uniforme $p^* = 1/2$.
- $R^{NEG} = 1/4$.

Competencia y licitaciones

- Negociación ignora segundo comprador.
- Se puede usar la competencia?
- Sí, hay que licitar!
- Pero hay muchos diseños posibles: Inglesa, Sobre cerrado primer precio, todos pagan.
- Precio mínimo?

Diseño de subastas

- Los debates en el diseño de subastas giran con frecuencia en torno a los ingresos que distintos formatos generan.
- Los defensores de los diseños de ofertas cerradas señalan el "dinero que queda sobre la mesa" cuando el ganador puja mucho más que la segunda puja más alta (no sucederá en una subasta ascendente!).
- Los defensores de las subastas ascendentes abiertas señalan a los postores que están motivados por competencia para ofertar muy cerca de sus valores máximos (no sucederá en una subasta de ofertas cerradas).

Un segundo mecanismo: Licitación inglesa

- Licitación inglesa: Vendedor parte con precio $p_0 = 0$ y lo sube continuamente hasta que sólo un comprador este dispuesto a comprar.
- Ahora tenemos un juego. Cual es una buena estrategia para un jugador?
- *Bajarse cuando el precio alcanza valoración propia v_i es una estrategia débilmente dominante*.
- *Intuición*: El bien me gusta v_i y me quedo en la licitacion mientras el precio este por debajo. Gano si salgo antes? No, pues corro el riesgo de perder el item aún cuando feliz habría pagado por el.
- $R^{ING} = \mathrm{E}[\min(v_1, v_2)] = 1/3$.

Un tercer mecanismo: Licitación primer precio

- Licitactión primer precio: Compradores simultáneamente pujan en sobres cerrados. Mayor oferta obtiene el bien pagando su oferta.
- Parece mejor para la recaudación pues se queda siempre con la mayor oferta.
- Este también es un juego!
- Estrategias $\sigma_i(v_i)$.
- Equilibrio Bayesiano (simétrico):

$$\sigma(v_i) \in \arg\max_p (v_i - p) \underbrace{\text{Prob}[p > \sigma(v_j)]}_{F(\sigma^{-1}(p))}$$

- Condición de optimalidad: $-F(v) + (v - \sigma(v))F'(v)\frac{1}{\sigma'(v)} = 0$
- Resolviendo EDO: $\sigma^*(v) = v/2$.
- $R^{PP} = \mathrm{E}[\max v_1/2, v_2/2] = 1/3$.

Resumen del ejemplo

$$R^{ING} = R^{PP} > R^{NEG}$$

Dos insights básicos:

- Cambio las reglas, cambio los incentivos!
- Es mejor agregar competencia a tener todo el poder negociador.

Licitaciones óptimas

- $N \geq 2$ participantes.
- Valoraciones privadas t_i que distribuyen F (regular), con $F' = f > 0$.
- $u_i(t_i, x_i, p_i) = t_i x_i - p_i$, x_i es la prob de obtener el bien y p_i es la transferencia
- Caso regular:

$$MR(t_i) = t_i - \frac{1 - F(t_i)}{f(t_i)}$$

  es creciente.
- Pregunta: Cuál es la mejor manera de recaudar para el vendedor?

Mecanismos directos

- Un mecanismo directo son funciones $x\colon [0,1]^N \to \mathbb{R}^N$, con $\sum_{i=1}^N x_i(t) \leq 1$, y $p\colon [0,1]^N \to \mathbb{R}^N$.
- Utilidad de un tipo t_i que reporta $\hat{t}_i$

$$U_i(t_i, \hat{t}_i) = \int (t_i x_i(\hat{t}_i, t_{-i}) - p_i(\hat{t}_i, t_{-i})) f_{-i}(t_{-i}) dt_{-i}$$

- Un mecanismo directo es compatible en incentivos si

$$U_i(t_i, t_i) \geq U_i(t_i, \hat{t}_i) \quad \forall t_i, \hat{t}_i$$

- Un mecanimos es individualmente racional si

$$U_i(t_i, t_i) \geq 0 \quad \forall t_i$$

El principio de la revelación

- Vendedor puede pensar en muchos posibles mecanismos.
- Un mecanismo es un espacio de mensajes $M = \prod_{i=1}^{N} M_i$ y funciones $\bar{x} \colon M \to \mathbb{R}^N$, $\bar{p} \colon M \to \mathbb{R}^N$ con $\sum_{i=1}^{N} x_i(m) \leq 1 \ \forall m$.
- Mecanismo es directo si $M_i = [0, 1]$.
- En un mecanismo general, la idea de compatibilidad de incentivos se puede reemplazar por la idea de Equilibrio Bayesiano.

Lemma (Principio de la revelación)

Dado cualquier mecanismo y estrategias de EB, existe un mecanismo directo y compatible en incentivos que implementa las mismas asignaciones y transferencias.

IDEA: Dado mecanismo $\bar{x} \colon M \to \mathbb{R}^N$, $\bar{p} \colon M \to \mathbb{R}^N$, sea $(\sigma_i(t_i))_{i=1}^{N}$ las estrategias de EB. Definir el mecanismo directo

$$x_i(t) = \bar{x}_i(\sigma_1(t_1), \dots, \sigma_N(t_N)) \quad p_i(t) = \bar{p}_i(\sigma_1(t_1), \dots, \sigma_N(t_N))$$

Mecanismo óptimo

- Problema de mecanismo óptimo se reduce a encontrar mejor mecanismo directo, compatible en incentivos, e individualmente racional
- Formulación:

$$\max_{x,p} \mathrm{E}[\sum_{i=1}^{N} p_i(t)]$$

sujeto a

$$\sum_{i=1}^{N} x_i(t) \leq 1 \quad \forall t_i$$

$$U_i(t_i, t_i) \geq U_i(t_i, \hat{t}_i) \quad \forall t_i, \hat{t}_i$$

$$U_i(t_i, t_i) \geq 0 \quad \forall t_i$$

donde

$$U_i(t_i, \hat{t}_i) = \int (t_i x_i(\hat{t}_i, t_{-i}) - p_i(\hat{t}_i, t_{-i})) f_{-i}(t_{-i}) dt_{-i}$$

Lemma de Myerson y el teorema de la envolvente

Sea $V_i(t_i) = \max_{\hat{t}_i \in [0,1]} \mathrm{E}_{t_{-i}}[x_i(\hat{t}_i, t_{-i})t_i - p_i(\hat{t}_i, t_{-i})]$.

Lemma (Lema de Myerson)

Sea (x, p) un mecanismo directo. Entonces, (x, p) es compatible en incentivos ssi

1. $V_i(t_i) = V_i(0) + \int_0^{t_i} \mathrm{E}_{t_{-i}}[x_i(s_i, t_{-i})]ds_i$;
2. $\mathrm{E}_{t_{-i}}[x_i(\hat{t}_i, t_{-i})]$ *es no-decreciente.*

Demostración

Proof.

Del teorema de la envolvente

$$
\begin{aligned}
V_i'(t_i) &= \frac{\partial V_i}{\partial t_i}(t_i, t_i) \\
&= \frac{\partial}{\partial t_i}\Big(\mathrm{E}_{t_{-i}}[x_i(\hat{t}_i, t_{-i})t_i - p_i(\hat{t}_i, t_{-i})]\Big) \mid_{\hat{t}_i = t_i} = \mathrm{E}_{t_{-i}}[x_i(t_i, t_{-i})]
\end{aligned}
$$

Para la segunda parte, dado t_i' y t_i sean
$x_i' = E_{t_{-i}}[x_i(t_i', t_{-i})]$, $p_i' = E_{t_{-i}}[p_i(t_i', t_{-i})]$
y
$x_i = E_{t_{-i}}[x_i(t_i, t_{-i})]$, $p_i = E_{t_{-i}}[p_i(t_i, t_{-i})]$.
Por compatibilidad de incentivos,

$$t_i x_i - p_i \geq t_i x_i' - p_i'$$

$$t_i' x_i' - p_i' \geq t_i' x_i - p_i$$

Luego, $t_i(x_i - x_i') \geq p_i - p_i' \geq t_i'(x_i - x_i')$ y $(t_i - t_i')(x_i - x_i') \geq 0$. $\square$

Equivalencia de ingresos

Theorem (Revenue equivalence theorem)

Cualquier par de mecanismos (directos o no) que otorgen utilidad esperada 0 al tipo $t_i = 0$ *y asignen de la misma manera (por ejemplo, eficientemente), resultan en la misma utilidad esperada para cada participante y para el vendedor.*

Proof.

Si un mecanismos otorga utilidad esperada 0 a $t_i = 0$, entonces

$$V_i(t_i) = \int_0^{t_i} \mathrm{E}_{t_{-i}}[x_i(s, t_{-i})]ds_i.$$

Luego, utilidad esperada de participante i con tipo t_i solo depende de regla de asignación. □

Demostración (cont)

Para calcular utilidad esperada del vendedor, calculamos la utilidad esperada del participante i:

$$\begin{aligned}
E_{t_i}[V_i(t_i)] - V_i(0) &= \int_0^1 \Big(\int_0^{t_i} E_{s_{-i}}[x_i(s_i, s_{-i}) ds_i] \Big) f(t_i) dt_i \quad \text{integral por} \\
&= \int_0^1 E_{s_{-i}}[x_i(s_i, s_{-i})] ds_i - \int_0^1 E_{s_{-i}} x_i(t_i, t_{-i}) F(t_i) dt_i \\
&= \int_0^1 E_{s_{-i}}[x_i(s_i, s_{-i})](1 - F(s_i)) ds_i \\
&= E_t[x_i(t) \frac{1 - F(t_i)}{f(t_i)}]
\end{aligned}$$

La recaudación esperada del vendedor $R(x, p)$ es

$$E[\sum_{i=1}^N t_i x_i(t)] - \sum_{i=1}^N V_i(t_i) = E_t[\sum_{i=1}^N t_i x_i(t)] - \sum_{i=1}^N ([x_i(t) \frac{1 - F(t_i)}{f(t_i)}] + V_i(0$$

$$= E_t[\sum_{i=1}^N (t_i - \frac{1 - F(t_i)}{f(t_i)}) x_i(t)] - \sum_{i=1}^N V_i(0)$$

Ejemplos

Supongamos $n = 2$ y t_i es $Unif[0,1]$.

- Segundo precio $b_i(t_i) = t_i$

$$E[R] = E[\min\{t_1, t_2\}] = 1/3$$

- Primer precio: $b_i(t_i) = t_i/2$

$$E[R] = E[\max(t_1/2, t_2/2)] = 1/3$$

- En general, para cualquier mecanismo que asigne eficientemente con $V_i(0 = 0)$,

$$\begin{aligned} E[R] =& E[\max(t_1 - \frac{1 - t_1}{1}, t_2 - \frac{1 - t_2}{1})] \\ =& E[\max(2t_1 - 1, 2t_2 - 1)] = 2E[\max(t_1, t_2)] - 1 \\ =& 2\frac{2}{3} - 1 = 1/3 \end{aligned}$$

Ejemplo: Licitaciones eficientes

Para cualquier licitación que siempre asigne el bien a quien mas lo valora con $V_i(0) = 0$:

$$E[R] = E[\max\{t_i - \frac{1 - F(t_i)}{f(t_i)} \mid i = 1, \ldots, N\}]$$

y

$$V_i(t_i) = \int_0^{t_i} E_{t_{-i}}[x_i(s_i, t_{-i})]ds_i = \int_0^{t_i} F(s_i)^{N-1} ds_i$$

Ejemplos: Calculando equilibrios en licitaciones

Example

Equilibrio en licitación todos pagan:

$$t_i F(t_i)^{N-1} - b(t_i) = \int_0^{t_i} F(s)^{N-1} ds$$

Luego, $b(t) = tF(t) - \int_0^t F(s)^{N-1} ds$. Si $N = 2$ y distribución uniforme: $b(t) = t^2 - \int_0^t s ds = t^2/2$.

Example

Equilibrio en licitación primer precio:

$$(t - b(t))F(t)^{N-1} = \int_0^t F(s)^{N-1} ds$$

Luego, $b(t) = t - \frac{\int_0^t F(s)^{N-1} ds}{F(t)^{N-1}}$. Si $N = 2$ y distribuciones uniformes $b(t) = t - \frac{\int_0^t s ds}{t} = t/2$.

Mecanismo óptimo

Volvemos al problema de mecanismo óptimo:

$$\max_{p,x} R(p,x)$$

sujeto a incentivos, participación, factibilidad.
Pero

$$R(p,x) = E[\sum_{i=1}^{N} MR(t_i)x_i(t)] - \sum_{i=1}^{N} V_i(0)$$

donde $MR(t_i) = t_i - \frac{1-F(t_i)}{f(t_i)}$.
Problema relajado:

$$\max_{x} \mathrm{E}[\sum_{i=1}^{N} MR(t_i)x_i(t)]$$

sujeto a $\sum_{i=1}^{N} x_i(t) \leq 1$.
Solución: Supongamos MR creciente y $MR(r^*) = 0$.

$$x_i^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i > \max_{j\neq i} t_j, t_i > r^* \\ 0 & \text{si no .} \end{cases}$$

Licitaciones óptimas de Myerson

Theorem (Teorema de Myerson, 1981)

Supongamos que MR es creciente. No existe mecanismo con un pago esperado mayor para el vendedor que una licitación inglesa con un precio de reserva r^* tal que $r^* - \frac{1-F(r^*)}{f(r^*)} = 0$. El mecanismo óptimo resulta en recaudación

$$E_t[\max\{MR(t_1), \ldots, MR(t_N), 0\}].$$

- Teorema caracteriza el mejor juego posible: Negociación, mecanismos aleatorios, licitación todos pagan, Holandesa no pueden dominar una licitación inglesa con precio mínimo .
- Información e incentivos tienen impactos en recaudación.
- Por el teorema de equivalencia de ingresos, existen muchos otros mecanismos óptimos (licitaciones con precios de reserva):
  - Licitación segundo precio con reserva r^*.
  - Primer precio con reserva r^*.

Licitaciones óptimas y monopolio

- En el caso simétrico, vendedor imponer precio de reserva para aumentar su ingreso. Tensión entre recaudación y eficiencia.
- Problema del monopolista:

$$\max QP$$

donde $Q = (1 - F(t))$, $P = t$. Luego $I(Q) = F^{-1}(1 - Q)Q$

$$IMG(Q) = 0 \text{ iff } P - \frac{Q}{F'(F^{-1}(1-Q))} = 0 \text{ iff } t^* - \frac{1 - F(t^*)}{f(t^*)} = 0$$

Condición de precio de reserva es identica a condición de optimalidad de problema de monopolio!.

Licitaciones óptimas: Contribuciones conceptuales y aplicaciones

- Principio de la revelación: Sin pérdida de generalidad, nos podemos restringir a mecanismos directos y compatibles en incentivos.
- Teorema de la envolvente y equivalencia de ingresos: Sea $U_i(v_i)$ la utilidad esperada de i condicional a su valoracion v_i. Entonces,

$$U_i(v_i) = U_i(0) + \int_0^{v_i} \mathrm{E}_{v_{-i}}[q_i(s_i, v_{-i})]ds_i$$

  donde $q_i(v)$ es la regla de asignación dados los reportes $v = (v_i, v_{-i})$.
- Otros problemas de diseño de mecanismos.

Caso asimétrico

- Distribuciones pueden ser asimétricas F_i.
- $MR_i(t_i) = t_i - \frac{1-F_i(t_i)}{f_i(t_i)}$ creciente.

Theorem

Supongamos que $MR_i(t_i)$ es creciente. Entonces, en un mecanismo óptimo, $V_i(0) = 0$ y el participante i recibe el bien cuando $MR_i(t_i) > \max\{0, \max_{j \neq i} MR_j(t_j)\}$. La recaudación esperada óptima es

$$E_t[\max\{MR_1(t_1), \ldots, MR_N(t_N), 0\}]$$

- Vendedor puede terminar entregando el bien a alguien que lo valore menos pero cuyo MR es alto.

Lecturas complementarias

- Milgrom, Putting auction theory to work, chapters 1,2, 3, 4
- Klemperer, Auction theory: A guide to the literature