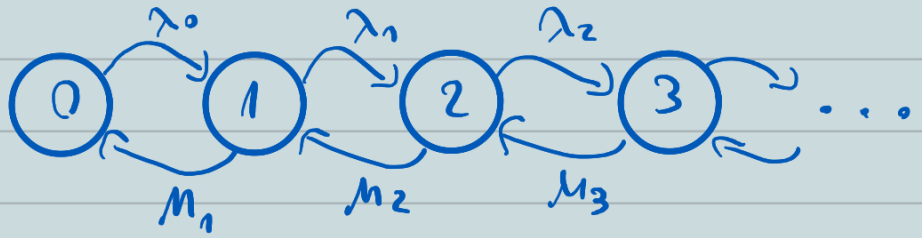
Resumen Colas

Proc. Nacimiento y Muerte

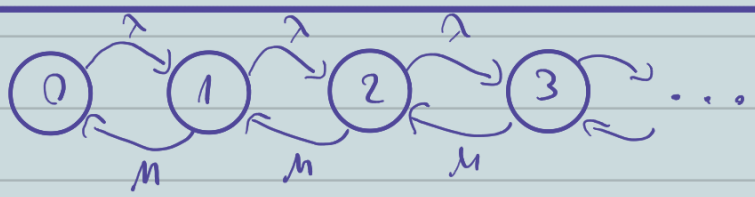
Considere un proceso estocástico que representa el tamaño de una población de individuos: cuando la población tiene tamaño $k \geq 0$ individuos *nacen* de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ_k y el tiempo hasta la primera muerte de alguno de estos k individuos se distribuye $\exp(\mu_k)$, $k \geq 1$.



Notación de Kendall : A|B|C|D|E|F

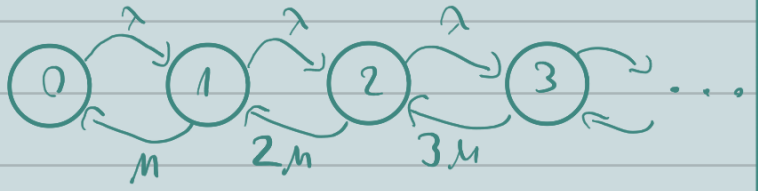
↳ proc. llegadas | t. servicio | servidores | capacidad | población | disc. atención

M|M|1



$\Pi_i = \rho^i (1-\rho)$ Cond. est: $\rho = \lambda/\mu < 1$

M|M|∞



$\Pi_i = \frac{\rho^i}{i!} e^{-\rho}$ Siempre hay prob. est.

Lema 6.1 (S. Ross - Lemma 5.6.2) Considere una fila $M/M/C$. Si $\lambda < C\,\mu$ (condición de estado estacionario), entonces el proceso de salida de entidades, en estado estacionario, es un proceso de Poisson de tasa λ.

Ley de Little

$$L = W \cdot \lambda$$

(promedio entidades en sistema = tiempo promedio estadía · tasa de llegada)

Métricas adicionales. Normalmente nos interesa calcular los tiempos promedios de estadía en el subsistema de espera y en el de servicio, y lo mismo para el número promedio de entidades. Utilizando los subíndices q y s para denotar dichos subsistemas, tenemos que

$$L = L_s + L_q, \qquad W = W_s + W_q,$$

M/M/1 $L = \lambda/(\mu - \lambda)$ $W = 1/(\mu - \lambda)$

M/M/∞ $L = \rho$ $W = 1/\mu$

Redes de Colas

Consideremos un sistema con k estaciones: las llegadas a la estación i desde el exterior forman un proceso de Poisson con tasa λ_i; esta estación cuenta con c_i servidores, cada uno de los cuales demora un tiempo aleatorio de distribución exponencial de tasa μ_i en atender a una entidad; una vez atendida, una entidad se dirige a la estación j con probabilidad $P_{i,j}$, independiente de todo lo demás.

P_{ij}: transición de estación i a j

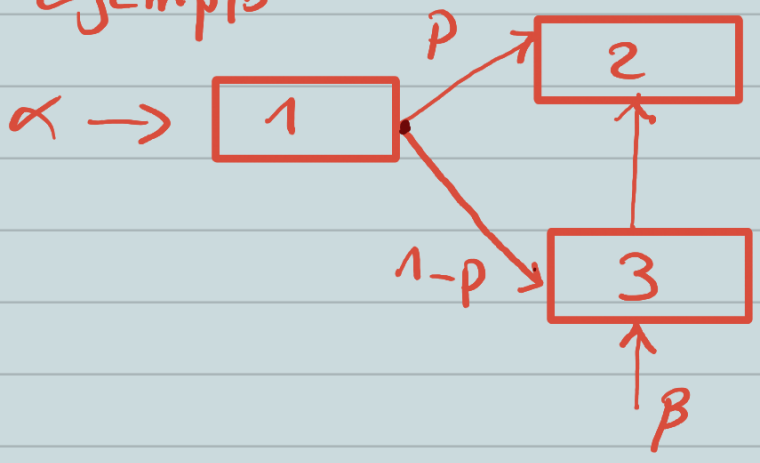
G: grafo que caracteriza la red

. . .

Cada estación j tiene una tasa efectiva de llegada $\bar{\lambda}_j$ y una tasa externa λ_j

$$\bar{\lambda}_j = \lambda_j + \sum_i P_{ij}\,\bar{\lambda}_i$$

Ejemplo:



$$\bar{\lambda}_1 = \alpha$$

$$\bar{\lambda}_2 = \alpha + \beta$$

$$\bar{\lambda}_3 = (1-p)\alpha + \beta$$

Proposición 5.2 (Probabilidades estacionarias red de colas) En la red de colas con matriz de ruteo P arbitraria, si $\bar{\lambda}_i < c_i\,\mu_i$, para todo $i \leq k$, tenemos que el vector de probabilidades estacionarias está dado por

$$\pi(n_1, \ldots, n_k) = \prod_{j=1}^{k} \pi_j(n_j),$$

donde π_j corresponde a las probabilidades estacionarias de una cola $M/M/c_j$ con llegada Poisson de tasa $\bar{\lambda}_j$ y atenciones exponenciales de tasa μ_j, donde $\{\lambda_i, i \leq k\}$ corresponde a la solución del sistema lineal.

$$\bar{\lambda}_j = \lambda_j + \sum_i P_{i,j}\,\bar{\lambda}_i, \quad j \leq k.$$

Adicionalmente, en estado estacionario: i) las salidas hacia el exterior desde la estación i forman un proceso de Poisson de tasa $\bar{\lambda}_i(1 - \sum_j P_{i,j})$; y ii) el número de entidades en las distintas estaciones son variables aleatorias independientes.