Procesos de Conteo

$\{N(t) : t \geq 0\}$ es un proceso de conteo si $N(t)$ toma valores enteros no negativos y crece con el tiempo $t \leq s \Rightarrow N(t) \leq N(s)$

1. Incrementos independientes
   $(t_1, s_1]$; $(t_2, S_2]$ son disjuntas
   $\Rightarrow$ $N(t_1, S_1)$ y $N(t_2, S_2)$ son independientes
   no me importa lo que paso en un período que no incluye el que estoy analizando

2. Incrementos estacionarios
   distribucion de $N(t, t+h)$ solo depende del largo del intervalo h y no de t.
   no importa en qué momento del tiempo estoy parado

3. Incrementos unitarios
   se cumple si ($\lambda > 0$) :
   a) $P(N(h) \geq 2) = o(h)$
   b) $P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$
   c) $P(N(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$$

las llegadas son de a 1

Procesos de Poisson

Un proceso de conteo que satisface los 3 incrementos y $N(0)=0$

En un proceso de Poisson de tasa λ se tiene:

tiempos entre llegadas son v.a iid: $T \sim Exp(\lambda)$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad E(T) = 1/\lambda$$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad V(T) = 1/\lambda^2$$

$$P(T > t+s \mid T > t) = P(T > s)$$

instantes de llegada distribuye $t_n \sim Earlang(n, \lambda)$

$$f_n(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$$

los incrementos distribuyen $N(t, t+h) \sim Poisson(\lambda h)$

$$P(N(h)=n) = \frac{e^{-\lambda h}(\lambda h)^n}{n!} \qquad E(N(h)) = V(N(h)) = \lambda h$$

Carrera de exponenciales: sea $X = \min\{X_1, X_2 \ldots, X_n\}$ $X_i \sim Exp(\lambda_i)$

1. $X \sim Exp(\lambda)$ $\quad \lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$
2. $P(X = X_i) = \lambda_i / \lambda$

Agregacion de Procesos de Poisson:

la suma de procesos de Poisson $N_i(t)$ independientes con tasa λ_i, también es proceso de Poisson con tasa λ:

$$N(t) = \sum_{i=1}^{n} N_i(t) \qquad \lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Desagregación Procesos de Poisson

Si las llegadas de un P. de Poisson $N(t)$ con tasa λ, se clasifican de tipo $i \in I$ con probabilidad p_i entonces:

$N_i(t)$: es P. de Poisson con tasa λp_i

$\sum_{i \in I} N_i(t) = N(t)$ y los $N_i(t)$ son independientes

(cada llegada es de solo un tipo: $\sum_{i \in I} p_i = 1$)