Pauta Auxiliar 7

27/09/2022

Pregunta 1:

Un vendedor de *Ultra Nueves* (la nueva golosina que revoluciona el mercado) realiza un recorrido en la *Colo University*, donde existen N estudiantes. Los *Ultra Nueves* son transportados en una caja que tiene M de estos dulces. En esta universidad existe un conjunto I de posibles tipos de estudiantes: donde un estudiante tipo $i \in I$ tiene disposición a pagar a_i (aceptará comprar el producto por cualquier precio menor o igual a este). La probabilidad de que un estudiante cualquiera sea del tipo i es p_i.

El vendedor puede ofrece una golosina a cada estudiante de forma ordenada (desde $n = 1$ hasta N), donde estos aceptan o rechazan la oferta según su disposición a pagar.

a) Modele el problema descrito con programación dinámica.

b) Resuelva el problema considerando $N = 3$, $M = 2$, $a = (\$50, \$60, \$90)$ y $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$.

Solución Pregunta 1

- Etapas: Cada cliente, $n : 1, \ldots, N$
- Variable de estado: s_n : cantidad de aspiradoras que me quedan al visitar el cliente n.
- Variable de decisión: x_n : qué precio ofrezco al cliente n. Se puede acotar el espacio de decisión a cualquiera de los precios a_i con $i \in I$.
- Variable aleatoria: $w = \begin{cases} 1 & \text{el cliente acepta el precio} \\ 0 & \text{el cliente rechaza el precio} \end{cases}$
  $P(w = 1|x_n) = \sum_{\{i \in I : x_n \leq a_i\}} p_i$
- Recurrencia de estados:
$$s_{n+1} = s_n - w$$
- Función de utilidad:
$$V_n\left(s_n, x_n\right) = E[x_n w + V_n^*(s_{i+1})]$$
  Se puede resolver la esperanza:
$$V_n\left(s_n, x_n\right) = P(w = 1|x_n) \cdot (x_n + V_{n+1}^*(s_n - 1) + P(w = 0|x_n) \cdot V_{n+1}^*(s_n)$$

$$V_n^*\left(s_n\right) = \max_{x_n \in \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{|I|}\}} V(s_n, x_n)$$
- Condiciones de borde:
$$s_0 = M$$
$$V_{N+1}^*\left(s_{N+1}\right) = 0$$
$$V_n^*\left(0\right) = 0 \quad \forall n \in \{1, \ldots, N\}$$

s_3/x_3	50	60	90	x_3^*	V_3^*
2	50	30	15	50	50
1	50	30	15	50	50
0	-	-	-	-	0

s_2/x_2	50	60	90	x_2^*	V_2^*
2	100	80	65	50	100
1	50	55	56.7	90	56.7

s_1/x_1	50	60	90	x_1^*	V_1^*
2	106.7	108.35	107.8	60	108.35

Pregunta 2

Usted quiere irse a acampar al *Club Hípico* y necesita saber como estará el clima. Decide preguntarle al dueño de su botillería favorita: *Boticheli*, que además es un meteorólogo experto. Cada día el clima puede ser bueno, malo o regular, pero nunca tiene dos días seguidos con el mismo clima. Más aún, si en dos días seguidos el clima es regular y malo (en cualquier orden) necesariamente el tercer día será bueno. Por otra parte, si en dos días seguidos el clima es bueno y regular (en cualquier orden) el tercer día tendrá mal clima con probabilidad p, y si en dos días seguidos el clima es bueno y malo (en cualquier orden), el tercer día tendrá clima regular con probabilidad q. ¡Qué clima tan extraño!

a) Modele la situación anterior como una Cadena de Markov en tiempo discreto. Escriba la matriz de transición y clasifique los estados.

b) Si el primer día fue malo y el segundo bueno, ¿Cual es la probabilidad de que el cuarto día sea bueno?.

Solución P2

a) Podemos modelar a través de la siguiente matriz de transición. Se debe tener en cuenta que los estados representan la información de ayer y hoy, por medio de una tupla (ayer,hoy). La notación es M:malo, R:regular y B:bueno. Todos los estados pertenecen a una única clase recurrente, pues se puede llegar desde un estado a cualquier otro.

	MR	RM	MB	BM	RB	BR
MR	0	0	0	0	1	0
RM	0	0	1	0	0	0
MB	0	0	0	1-q	0	q
BM	q	0	1-q	0	0	0
RB	0	0	0	p	0	1-p
BR	0	p	0	0	1-p	0

Table 1: matriz de transición: P

b) Para calcular esta probabilidad debemos elevar la matriz P, siguiendo el sentido de $P^n_{i,j}$: probabilidad de ir del estado i al j en n pasos. De esta forma la probabilidad pedida es:

$$P^2_{MB,MB} + P^2_{MB,RB} = (1-q)^2 + q(1-p)$$