Departamento de Ingeniería Civil Industrial
Decisiones Bajo Incertidumbre - IN3272
Profesor: Susana Mondschein
Auxiliares: S. Del Rio, F. Del Solar, H. González, D. Kauer, L. Magga, A. Munizaga, D. Quintanilla, P. Ubilla, V. Vásquez

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 9: CMTD (Generalizaciones)

11 de octubre de 2022

Pregunta 1

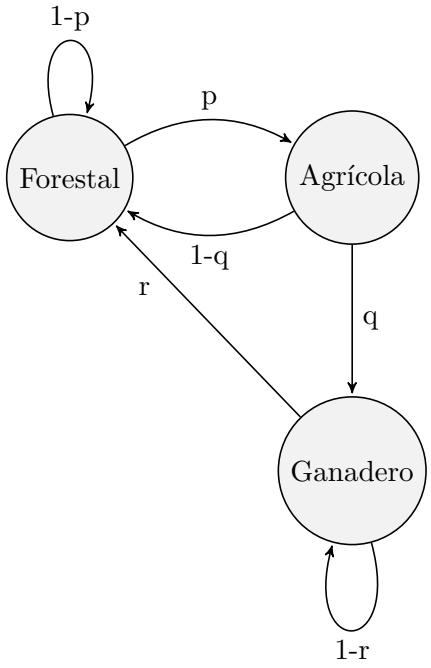
Imagine que está estudiando el uso de tierra en las zonas rurales de Chile. Para esto, utiliza imágenes satelitales para ver como se destina la tierra en cada lote del país. Cuando realiza el estudio existen N lotes que va a estudiar. Además, sabe que los dueños de estos lotes deciden como van a utilizar la tierra cada año, considerando lo que hace el resto de los productores del país. Existen tres tipos de uso de tierra: Forestal, Agrícola, Ganadero. Si un lote tiene un uso forestal, la probabilidad que el dueño corte los árboles y se dedique a la industria Agrícola al año siguiente es p. Si un lote se dedica a la Agricultura, tiene dos opciones: Cambiarse a la Ganadería o volver a la industria Forestal. Lo primero ocurre con probabilidad q y lo segundo $1 - q$. Debido a recientes regulaciones, no se puede destinar un lote a la Agricultura por dos años consecutivos para evitar los monocultivos. Si la parcela se dedica a la Ganadería, al siguiente año puede volver a plantar árboles, lo que ocurre con probabilidad r, o puede seguir dedicándose a la Ganadería.

En cualquier año, puede ocurrir un incendio en los lotes forestales, obviamente, entre mayor cantidad de árboles plantados hay una mayor cantidad de incendios forestales. La probabilidad de que un lote Forestal, se incendie es α.

a) Modele esta situación como una cadena de Márkov en tiempo Discreto (Grafo, Probabilidades de Transición). **Hint:** Modele el estado de cada lote como un sistema independiente del resto.

Solución: Los estado son: {Forestal, Agrícola, Ganadero}

El grafo de la cadena queda de la siguiente manera:



b) Encuentre las probabilidades estacionarias.

Solución: El sistema a resolver es el siguiente:

$$\pi_{\text{for}} = (1-p)\pi_{\text{for}} + (1-q)\pi_{\text{agri}} + r\pi_{\text{gana}} \tag{1}$$

$$\pi_{\text{agri}} = p\pi_{\text{for}} \tag{2}$$

$$\pi_{\text{gana}} = (1-r)\pi_{\text{gana}} + q\pi_{\text{agri}} \tag{3}$$

$$\pi_{\text{for}} + \pi_{\text{agri}} + \pi_{\text{gana}} = 1 \tag{4}$$

Para resolver el sistema, reemplazamos la ecuación (2) en la (3)

$$\pi_{\text{Agri}} = \frac{pq}{r}\pi_{\text{for}} \tag{5}$$

Luego, reemplazando (2) y (5) en (4) y despejando π_{for}

$$\pi_{\text{for}} = \frac{r}{r + rp + pq}$$

De esta forma las otras probabilidades quedan:

$$\pi_{\text{gana}} = \frac{rp}{(r + rp + pq)}$$

$$\pi_{\text{agri}} = \frac{pq}{r + rp + pq}$$

c) Considerando que han pasado varios años desde que comenzó su estudio por el uso de tierra:

i) ¿Cuál es la probabilidad de que un lote no sea Forestal?

ii) ¿Cuál es la probabilidad de que k lotes sean Forestales?

ii) ¿Cuál es la probabilidad de que para cualquier año ocurra un incendio forestal?

Solución:

i) La probabilidad de que un Lote no sea forestal es simplemente la suma de las probabilidades estacionarias para los estados que no sean Forestal

$$\mathbb{P}(Lote\ no\ sea\ Forestal) \ = \ \pi_{gana} \ + \ \pi_{Agri} = \ \frac{rp+pq}{r+rp+pq}$$

ii) La probabilidad de que k Lotes sean Forestales viene dada por la distribución binomial:

$$\mathbb{P}(k\ lotes\ sean\ forestales) \ = \binom{N}{k} \pi_{for}^{k}(1-\pi_{for})^{N-k}$$

iii) La probabilidad de que haya al incendio un año es:

$$\mathbb{P}(al\ menos\ 1\ Lote\ forestal\ se\ incendie) \ = \ 1 \ - \ \mathbb{P}(no\ haya\ incendio)$$

$$= 1-\sum_{k=1}^{N} \left(\mathbb{P}(no\ haya\ incendio\ dado\ que\ hay\ k\ forestales) \ \cdot \mathbb{P}(k\ lotes\ sean\ forestales)\ \right)$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{N}(1-\alpha)^{k} \binom{N}{k} \pi_{for}^{k}(1-\pi_{for})^{N-k}$$

Donde la segunda igualdad viene de usar probabilidades totales y la tercera de resultados anteriores.

Pregunta 2

Mariano Suárez es el encargado del banco central de su país y quiere genera una nueva política en cuanto a la moneda nacional, donde se cumple que:

- El valor de la moneda nacional se mantiene constante durante el día, y está dado por una variable aleatoria discreta.
- La valuación de la moneda sólo puede tomar valores entre 0 y un límite N fijo.
- Entre un día y el siguiente, el valor de la moneda puede permanecer constante o aumentar/disminuir en una unidad, con variaciones independientes entre días distintos.
- Si el valor de la moneda en un día dado es i, entonces al día siguiente su valor puede:
  1. Permanecer en i, con probabilidad 1/2.
  2. Disminuir a $i-1$, con probabilidad $\frac{1}{2} \cdot \frac{i}{N}$
  3. Aumentar a $i+1$, con probabilidad $\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{i}{N}\right)$

a) Escriba este modelo como como una cadena de Markov a tiempo discreto, explique por qué es homogénea y dibuje el grafo asociado.

Solución

Las probabilidades de transición son:

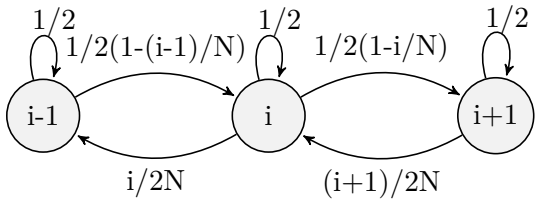
$$p_{ij}(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si \quad i = j \\ \frac{i}{2N} & si \quad j = i-1 \\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{i}{N}\right) & si \quad j = i+1 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Como se puede ver que estas no dependen de n, se tiene que:

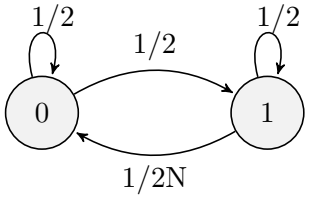
$$\forall \quad np_{ij}(n) = p_{ij}$$

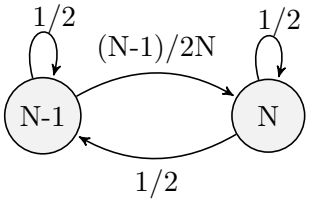
cumpliendo con la condición de homogeneidad.

La cadena para un estado i cualquiera es:



Las colas están dadas por:





Mariano quiere conocer la distribución de probabilidad del valor de la moneda a largo plazo para confirmar si su política es estable económicamente. Es decir, quiere analizar el valor de la moneda en un tiempo infinitamente lejano.

b) Justifique la existencia de un vector estacionario de probabilidades $\pi = (\pi_i)_{0 \leq i \leq N}$, donde para cada i, π_i representa la probabilidad de que la moneda valga i en el largo plazo.

Solución:

Para que una cadena de markov tenga un vector de probabilidades estacionarias, esta tiene que ser **irreducible** y **ergodica**. Esto quiere decir que tiene una sola clase recurrente y que su periodo es 1, respectivamente. Basta ver que para cualquier nodo, en particular $i = 0$, su periodo es 1 y además, esta clase es recurrente, pues $i = 0$ y $i = N$ están comunicados entre ellos. Por lo tanto, existe.

c) Muestre que π satisface la recurrencia

$$\pi_i = \left(1 - \frac{i-1}{N}\right)\pi_{i-1} + \frac{i+1}{N}\pi_{i+1} \quad \forall 0 \leq i \leq N$$

(donde entendemos $\pi_{-1} = \pi_{N+1} = 0$). Concluya que necesariamente $\pi_i = \frac{1}{2^N}\begin{pmatrix} N \\ i \end{pmatrix}$ para todo $0 \leq i \leq N$

Solución:

Como sabemos que:

$$\pi_i = \sum_j \pi_j \cdot p_{j,i}$$

$$\pi_i = \pi_{i-1} \cdot p_{i-1,i} + \pi_i \cdot p_{i,i} + \pi_{i+1} \cdot p_{i+1,i} = \pi_{i-1} \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{i-1}{N}\right) + \frac{1}{2} \cdot p_{i,i} + \pi_{i+1} \cdot \frac{i+1}{2N}$$

Por lo tanto:

$$\pi_i = \pi_{i-1} \cdot \left(1 - \frac{i-1}{N}\right) + \pi_{i+1} \cdot \frac{i+1}{N}$$

Para demostrar que $\pi_i = \frac{1}{2^N}\begin{pmatrix} N \\ i \end{pmatrix}$, vamos a ver que satisface la ecuación de recursión.

$$\begin{aligned}
\pi_i &= \frac{1}{2^N}\begin{pmatrix} N \\ i-1 \end{pmatrix} \cdot \left(1 - \frac{i-1}{N}\right) + \frac{1}{2^N}\begin{pmatrix} N \\ i+1 \end{pmatrix} \cdot \frac{i+1}{N} \\
&= \frac{1}{2^N}\left(\frac{N!}{(N-(i-1))!(i-1)!} \cdot \frac{N-(i-1)}{N} + \frac{N!}{(N-(i+1))!(i+1)!} \cdot \frac{i+1}{N}\right) \\
&= \frac{1}{2^N}\left(\begin{pmatrix} N-1 \\ i-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N-1 \\ i \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{2^N}\begin{pmatrix} N \\ i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

d) Muestre que para todo par de estados i, j se cumple que:

$$\pi_i \cdot P_{i,j} = \pi_j \cdot P_{j,i}$$

Solución:

Caso $i = j$:

$$\pi_i \cdot P_{i,j} = \pi_j \cdot P_{j,j}$$

y

$$\pi_j \cdot P_{j,i} = \pi_j \cdot P_{j,j}$$

Caso $i = j + 1$:

$$\begin{aligned}
\pi_i \cdot P_{i,j} = \pi_{j+1} \cdot P_{j+1,j} &= \frac{1}{2^N}\begin{pmatrix} N \\ j+1 \end{pmatrix} \cdot \frac{j+1}{2N} \\
&= \frac{1}{2^N}\frac{N!}{(N-(j+1))!(j+1)!} \cdot \frac{j+1}{2N} \\
&= \frac{1}{2^N}\frac{N!}{(N-(j+1))!(j+1)!} \cdot \frac{j+1}{2N} \cdot \frac{N-j}{N-j} \\
&= \frac{1}{2^N}\frac{N!}{(N-j)!(j)!} \cdot \frac{1}{2N} \cdot (N-j) \\
&= \frac{1}{2^N}\begin{pmatrix} N \\ j \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\frac{N-j}{N} \\
&= \pi_j \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{j}{N}\right) = \pi_j \cdot P_{j,j+1} = \pi_j \cdot P_{j,i}
\end{aligned}$$

Por simetría es igual para $i = j - 1$