IN2201 - Economía

Tarea Módulo 2 - Escasez

Problema 1

Considere un individuo que consume dos bienes, x e y. La utilidad que el individuo percibe al consumir estos bienes esta dada por:

$$u(x,y) = (x^r + y^r)^{1/r} \tag{1}$$

El ingreso del individuo es fijo e igual a I, que se dispone para consumir x e y dados los precios de los bienes p_x y p_y. Luego, la decision de cuanto consumir de cada bien se puede describir a traves del siguiente problema de optimización:

$$\max_{x,y} u(x,y)$$
$$p_x x + p_y y \leq I$$

1. Calcule el consumo optimo x^* e y^* como funcion de los parámetros I, p_x, p_y y r.

La función de consumo de un bien calculada anteriormente se denomina la *curva de demanda*. Se define el concepto de *elasticidad de demanda* como el cambio porcentual en el consumo generado por cambios en el ingreso o los precios de los bienes. Por ejemplo, la *elasticidad precio* de la demanda por el bien x se define como:

$$e(x^*, p_x) = \frac{\partial x^*}{\partial p_x} \cdot \frac{p_x}{x^*}$$

2. Calcule la elasticidad precio de la demanda para cada bien, $e(x^*, p_x)$, $e(y^*, p_y)$.
3. Calcule la elasticidad *precio cruzada* de la demanda del bien x, $e(x^*, p_y)$.
4. Calcule la elasticidad de la demanda con respecto al ingreso I, $e(x^*, I)$.
5. Discuta como las elasticidades calculadas dependen del parámetro r.
6. Fije valores de los parametros I, r, p_y y utilice una planilla de calculo para graficar la curva de demanda de x como funcion de p_x. En el mismo grafico, muestre como cambia la curva cuando aumenta el valor de I y cuando aumenta el valor de p_y. (el grafico debe mostrar tres curvas en total).

Pauta:

1. Para resolver el problema, vamos a sustituir una de las variables $y = \frac{I - p_x x}{p_y}$ y vamos a aplicar la función log() a la función objetivo para facilitar el desarrollo (como el logaritmo es una función monótona y creciente, el óptimo es el mismo que el del problema original). Luego:

$$\max_{x \geq 0} \quad \frac{1}{r} \log(x^r + y^r)$$

Utilizando condiciones de primer orden;

$$\frac{1}{r} \frac{1}{(x^r + y^r)} (r x^{r-1} + r y^{r-1} y') \overset{!}{=} 0$$

Asumiendo que $(x^r + y^r) > 0$, lo que es razonable dado que al menos el consumo de un bien debería ser mayor a 0, la expresión queda como;

$$x^{r-1} = y^{r-1} \cdot (-y') \Leftrightarrow x^{r-1} = \left(\frac{I - p_x x}{p_y} \right)^{r-1} \left(\frac{p_x}{p_y} \right)$$

Despejando x en la expresión anterior obtenemos;

$$x^* = I \cdot \frac{p_x^{\frac{1}{r-1}}}{p_x^{\frac{r}{r-1}} + p_y^{\frac{r}{r-1}}}$$

El procedimiento para obtener y^* es análogo, y se obtiene;

$$y^* = I \cdot \frac{p_y^{\frac{1}{r-1}}}{p_x^{\frac{r}{r-1}} + p_y^{\frac{r}{r-1}}}$$

2. Calculamos primero la derivada $\partial_{p_x} x^*$;

$$\frac{\partial x^*}{\partial p_x} = I \cdot \frac{\partial_{p_x}[p_x^{\frac{1}{r-1}}](p_x^{\frac{r}{r-1}} + p_y^{\frac{r}{r-1}}) - p_x^{\frac{1}{r-1}} \partial_{p_x}[p_x^{\frac{r}{r-1}} + p_y^{\frac{r}{r-1}}]}{(p_x^{\frac{r}{r-1}} + p_y^{\frac{r}{r-1}})^2}$$

$$= \frac{I}{r-1} \cdot \frac{p_x^{\frac{2}{r-1}}(1-r) + (p_x^{2-r} \cdot p_y^r)^{\frac{1}{r-1}}}{(p_x^{\frac{r}{r-1}} + p_y^{\frac{r}{r-1}})^2}$$

La derivada $\partial_{p_y} y^*$ debería ser análoga:

$$\frac{\partial y^*}{\partial p_y} = \frac{I}{r-1} \cdot \frac{p_y^{\frac{2}{r-1}}(1-r) + (p_y^{2-r} \cdot p_x^r)^{\frac{1}{r-1}}}{(p_x^{\frac{r}{r-1}} + p_y^{\frac{r}{r-1}})^2}$$

Calculando ahora la elasticidad;

$$e(x^*, p_x) = \frac{I}{r-1} \cdot \frac{p_x^{\frac{2}{r-1}}(1-r) + (p_x^{2-r} \cdot p_y^r)^{\frac{1}{r-1}}}{(p_x^{\frac{r}{r-1}} + p_y^{\frac{r}{r-1}})^2} \cdot p_x \cdot \frac{p_x^{\frac{r}{r-1}} + p_y^{\frac{r}{r-1}}}{I \cdot p_x^{\frac{1}{r-1}}}$$

$$\Rightarrow e(x^*, p_x) = \frac{1}{r-1} \cdot \frac{p_x^{\frac{r}{r-1}}(1-r) + p_y^{\frac{r}{r-1}}}{p_x^{\frac{r}{r-1}} + p_y^{\frac{r}{r-1}}}$$

Y de manera análoga;

$$e(y^*, p_y) = \frac{1}{r-1} \cdot \frac{p_y^{\frac{r}{r-1}}(1-r) + p_x^{\frac{r}{r-1}}}{p_x^{\frac{r}{r-1}} + p_y^{\frac{r}{r-1}}}$$

3. Calculamos las derivadas cruzadas;

$$\frac{\partial x^*}{\partial p_y} = -\frac{I \cdot r}{r-1} \cdot \frac{(p_x \cdot p_y)^{\frac{1}{r-1}}}{(p_x^{\frac{r}{r-1}} + p_y^{\frac{r}{r-1}})^2}$$

Notemos que por simetría, $\partial_{p_x} y^*$ es igual a $\partial_{p_y} x^*$. Luego, la elasticidad precio cruzada es,

$$e(x^*, p_y) = -\frac{I \cdot r}{r-1} \cdot \frac{(p_x \cdot p_y)^{\frac{1}{r-1}}}{(p_x^{\frac{r}{r-1}} + p_y^{\frac{r}{r-1}})^2} \cdot p_y \cdot \frac{p_x^{\frac{r}{r-1}} + p_y^{\frac{r}{r-1}}}{I \cdot p_x^{\frac{1}{r-1}}} = -\frac{r}{r-1} \cdot \frac{p_y^{\frac{r}{r-1}}}{p_x^{\frac{r}{r-1}} + p_y^{\frac{r}{r-1}}}$$

Y para el otro caso es,

$$e(y^*, p_x) = -\frac{r}{r-1} \cdot \frac{p_x^{\frac{r}{r-1}}}{p_x^{\frac{r}{r-1}} + p_y^{\frac{r}{r-1}}}$$

4. Utilizando la fórmula entregada $e(x^*, I) = \frac{\partial x^*}{\partial I} \cdot \frac{I}{x^*}$ es fácil notar que $e(x^*, I) = e(y^*, I) = 1$

5. Hay que tomar el límite de las elasticidades, utilicemos los siguientes casos. En $r \to 0$, la elasticidad precio para un mismo bien tiende a -1, quedando en un punto de elasticidad unitaria, donde un aumento porcentual del precio se traduce en una misma disminución porcentual de demanda, mientras que la elasticidad precio cruzada tiende a 0, es decir, los bienes no se sustituyen ni se complementan, o dicho de otra manera, la variación en el precio del un bien no afecta la demanda del otro. En $r \to 1$, la elasticidad precio tiende a ∞, es decir, que sería perfectamente elástico, y una variación ínfima en el precio va a generar una variación abrupta en el consumo, mientras que la elasticidad precio cruzada tiende a $-\infty$, es decir, que es un sustituto perfecto del otro y terminaré eligiendo el bien y o x.

   En cualquiera de los casos anteriores, la elasticidad-renta es 1, lo que significa que un aumento porcentual en la renta supone el mismo aumento porcentual en el consumo de cualquier bien, independiente de r.

6. Se grafica la demanda considerando $r = 0{,}3$, para los precios $p_y \in \{1, 15\}$ y los ingresos $I \in \{100, 200\}$

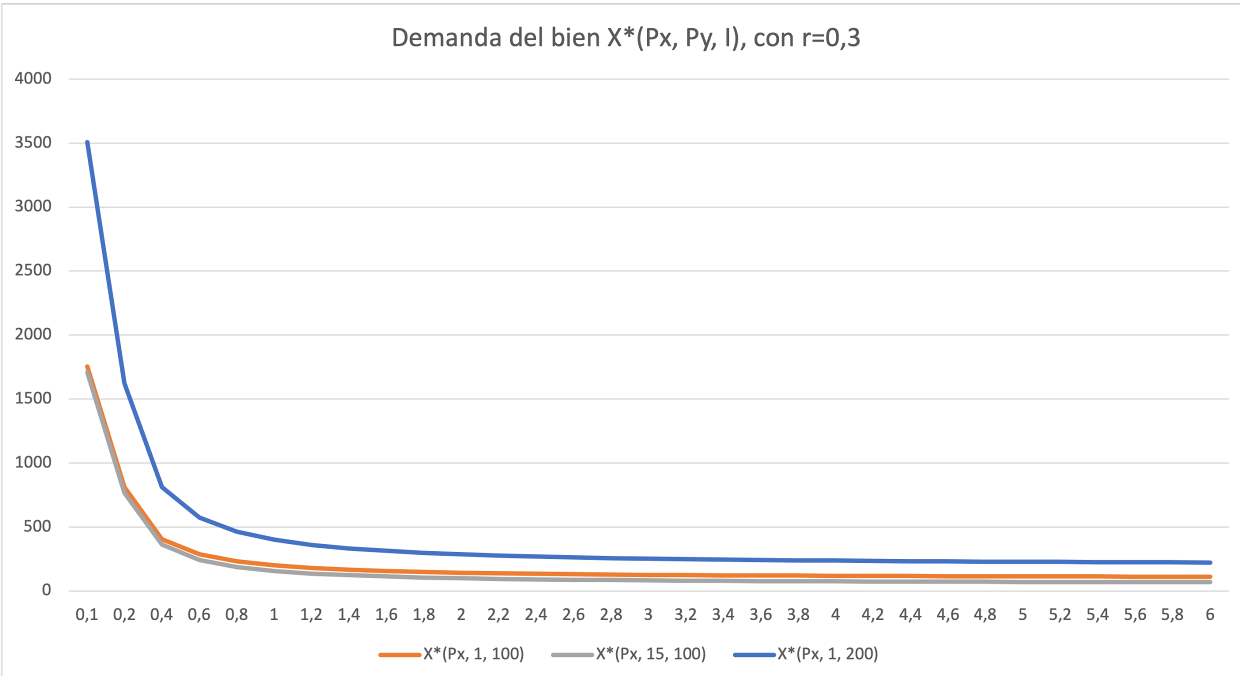

Figura 1: Curvas de demanda de x^* para diferentes parámetros

Problema 2

Considere ahora la siguiente funcion de utilidad:

$$u(x, c) = v(x) + c \tag{2}$$

donde $v(x)$ es una funcion creciente y cóncava. El consumo $x \geq 0$ solo puede tomar valores enteros. Considere c como el ingreso destinado al consumo de otros bienes distintos de x. Esta funcion de utilidad es conocida como *utilidad quasi-lineal*. El ingreso del individuo es I y el precio del bien x es p.

1. Calcule la funcion de demanda del bien x como funcion del precio p, el ingreso I y la funcion $v(\cdot)$.

2. Calcule la utilidad que el individuo percibe en funcion de I, p y $v(\cdot)$ (cuando elige el consumo óptimo de x).

Pauta:

- Considerando que $c = I - px$, podemos resolver el problema en función de x maximizando $u(x) = v(x) + I - px$ y obtenemos obtenemos la siguiente condición de primer orden: $v'(x^*) = p$.

  Como no conocemos $v(\cdot)$ no podemos hallar explícitamente una curva de demanda del tipo $x^*(p)$. $v'(x)$ sería la curva de demanda que expresa *la valoración que tienen los consumidores por cada unidad adicional del bien x*, notemos además que v' es decreciente (como v es cóncava, entonces $v'' < 0$), lo que tiene sentido, dado que a mayor consumo de el bien x la utilidad adicional ganada es menor (e.g. el valor que percibo por comprarme una TV nueva es menor si es que tengo cinco TV respecto a cuando tengo ninguna).

La cpo nos indica que el óptimo se alcanza cuando la utilidad marginal por consumir una unidad adicional de x es igual al precio p que cuesta el bien, el punto óptimo es donde soy indiferente en seguir consumiendo porque el beneficio adicional es igual al costo adicional.

En virtud de que la función de utilidad es quasi-lineal, se puede separar el consumo de x y c para expresarlo todo en términos de x que es lo bien de interés (el consumo de otros bienes c óptimo sencillamente es $c^* = I - px^*$, es decir, la fracción del ingreso que no destine a consumir x^*)

Nota: *Los puntos más relevantes a evaluar son: dar con una condición de primer orden para hallar el óptimo, interpretar que significa esta cpo y que dependa del precio y estudiar las propiedades de v.*