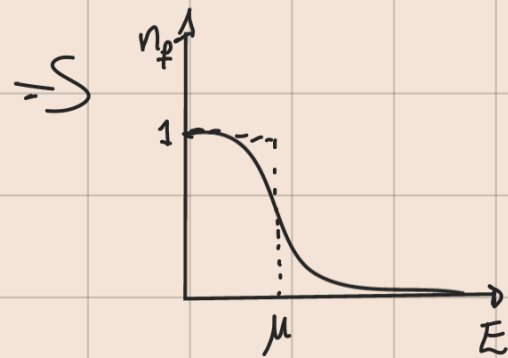


Pl  Un gas de fermi consiste en un sistema de partículas fermionicas no interactuantes. espín semi entero.

→

a)  Área $A = L^2$, tenemos N partículas dentro. al ser fermiones sabemos que su distribución estadística será la distribución de fermi



$$n_f = \frac{1}{1 + e^{\frac{E - \mu}{k_B T}}}; E_f = \mu \text{ en } T \rightarrow 0$$

$$E_f = E_f(A, N) \sim E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

para seguir avanzando debemos resolver Schr. dentro de la caja:

$$\nabla^2 \psi = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi \quad \text{con } \psi = \psi_x(x) \cdot \psi_y(y) \quad \text{separación de variables}$$

hacemos los anzats que nos sabemos:

$$\psi_x(x) = A e^{ik_x x} + B e^{-ik_x x} \quad \text{análogo para } y.$$

¿Qué cambia en todo esto? Ahora tendremos condiciones de borde periódicas $\Rightarrow \psi_x(x) = \psi_x(x+L)$

$$\Leftrightarrow A e^{ik_x x} + B e^{-ik_x x} = A e^{ik_x(x+L)} + B e^{-ik_x(x+L)}$$

$$\Rightarrow A = A e^{ik_x L} \wedge B = B e^{-ik_x L}$$

esto nos deja con: $\cos(k_x L) + i \sin(k_x L) = 1$

$$\cos(k_x L) - i \sin(k_x L) = 1$$

$$\Rightarrow \cos(k_x L) = 1 \Rightarrow k_x = \frac{2\pi}{L} n_x; n_x \in \mathbb{Z}$$

y por lo tanto $k_y = \frac{2\pi}{L} n_y; n_y \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow k_{x,y} = \sqrt{\frac{2m E_{x,y}}{\hbar^2}}$$

y así $\psi_{x,y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{A}} e^{i(k_x x + k_y y)}$ ¿y los negativos? en los k

Además $\frac{1}{\sqrt{A}}$ sale de normalizar $\int_0^L \int_0^L \psi \psi^* dx dy = 1$
por otra parte

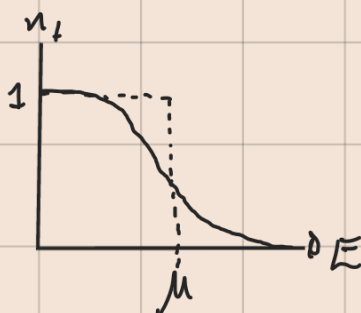
$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}; k^2 = k_x^2 + k_y^2 \text{ porque } \vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y}$$

Ahora $N = g_s \sum_{\vec{k}} n_{\pm}(E(\vec{k}), T)$ donde g_s es la degeneración por spin, que en caso de electrón

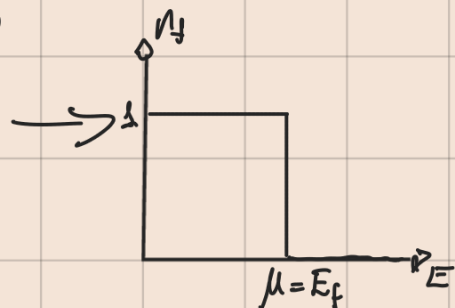
será 2 ya que tenemos $\pm \frac{1}{2}$ spin por nivel: $g_s = 2 \cdot S + 1$

por otra parte:

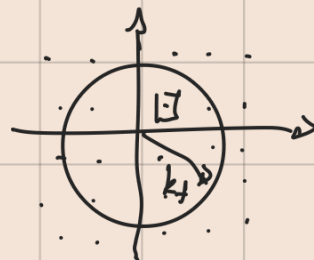
$$n_f = \frac{1}{1 + e^{\frac{E - \mu}{k_B T}}}$$



pero en $T=0$



$$\sum_{\vec{k}} \rightarrow \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \int d\vec{k}$$



$$N = \frac{g_s \cdot A}{4\pi^2} \int_{|\vec{k}| < |\vec{k}_f|} d\vec{k} = \frac{g_s \cdot A}{4\pi^2} \cdot \pi k^2$$

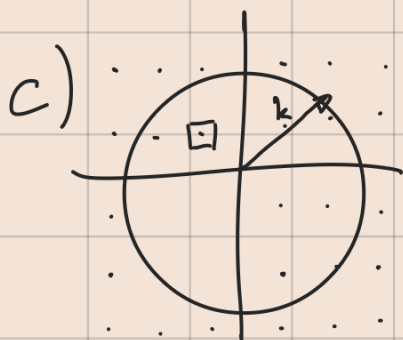
$$\Rightarrow k_f^2 = \frac{4\pi N}{g_s A} = \frac{2m E_f}{\hbar^2} \Rightarrow N = \frac{g_s A}{4\pi} \cdot \frac{2m E_f}{\hbar^2}$$

$$\Rightarrow E_f = \frac{2\pi \hbar^2}{g_s A m} \cdot N$$

$$b) E_{\text{mean}} = g_s \sum_{\vec{k}} E(\vec{k}) \cdot n_f(E(\vec{k}), T)$$

$$= g_s \cdot \frac{A}{(2\pi)^2} \int_0^{k_f} dk \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{g_s A \hbar^2}{8\pi^2 m} \int_0^{k_f} k^3 dk \cdot \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$E_{\text{mean}} = \frac{g_s A k_f^4 \hbar^2}{4\pi m \cdot 4} = \frac{g_s A}{4\pi m} \cdot \frac{16\pi^2 N^2}{g_s^2 \cdot A^2} \cdot \frac{\hbar^2}{4} = \frac{N^2 \hbar^2 \pi}{m g_s A} = N \frac{E_f}{2} //$$



$$\text{numero de pontos} = \frac{\pi k^2}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2} = \frac{k^2 L^2}{4\pi}$$

$$\Rightarrow N = g_s \frac{k^2 L^2}{4\pi} ; g(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{dN}{dk} \cdot \frac{dk}{dE} ; k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$g(E) = \frac{g_s k L^2}{2\pi} \cdot \left(\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{E}} \right)$$

$$d) g(E) = \frac{g_s L^2}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{E}} \cdot \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \frac{g_s L^2 m}{2\pi \hbar^2} //$$

densidade de estados

numero de particulas total mediante integracion de E:
para um T arbitrario:

$$N = \int_0^{\infty} g(E) n_f(E, \mu, T) dE = g(E) \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + e^{\frac{E - \mu}{k_B T}}} dE$$

$$N = g(E) \int_{-\mu}^{\infty} \frac{1}{1 + e^{\frac{x}{k_B T}}} dx = g(E) \int_{-\mu}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x}{k_B T}}}{1 + e^{-\frac{x}{k_B T}}} dx = g(E) (-k_B T) \ln(1 + e^{-\frac{x}{k_B T}}) \Big|_{-\mu}^{\infty}$$

$$N = -k_B T \cdot g(E) [\ln(1) - \ln(1 + e^{\frac{\mu}{k_B T}})]$$

$$N = k_B T g(E) \ln(1 + e^{\frac{-\mu}{k_B T}})$$

podemos sacar μ de acá como $\mu(T) = k_B T \ln(\exp(\frac{N}{k_B T g}) - 1)$

P2

a) $g(E)$. tenemos un volumen como $V = L^3$

· Separación de variables en 3D de $k_{x,y,z} = \frac{2\pi}{L} n_{x,y,z}$

con $n \in \mathbb{Z}$

$$\cdot k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

$$\cdot k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \cdot \sqrt{E}$$

ahora, la cantidad de estados en el volumen del espacio k será

$$\#(\cdot) = \frac{\frac{4}{3}\pi k^3}{(\frac{2\pi}{L})^3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{k^3 L^3}{\pi^2} \quad \text{volumen de la esfera en espacio } k$$

Volumen de cada estado

$$\therefore N = g_s \cdot \frac{L^3 k^3}{6\pi^2} = \frac{g_s L^3}{6\pi^2} \cdot \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot E^{3/2}$$

finalmente:

$$g(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{3}{2} \cdot \frac{g_s L^3}{6\pi^2 \hbar^3} \cdot (2m)^{3/2} \sqrt{E}$$

$$\Rightarrow g(E) = \frac{g_s V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{E}$$

$$b) T=0 K \rightarrow \langle E \rangle = \int_0^{\infty} E g(E) n_f(E, T=0) dE$$

$$\langle E \rangle = \int_0^{E_f} E g(E) \cdot 1 dE = \frac{g_s V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{E_f} \sqrt{E'} \cdot E dE$$

$$\langle E \rangle = \frac{2}{5} \cdot \frac{g_s V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot E_f^{5/2} \quad // \quad E_f = \epsilon?$$

$$N = \int_0^{\infty} g(E) n_f(E, T=0) dE = \int_0^{E_f} C E^{1/2} dE = C \cdot \frac{2}{3} E_f^{3/2}$$

$$\Rightarrow E_f = \left(\frac{3}{2} \frac{N}{C} \right)^{2/3} //$$

$$c) \mu = E_c ; P(E = E_c - k_B T)$$

kenn

$$n_f = \frac{1}{1 + e^{\frac{E - \mu}{k_B T}}}$$



$$P = \frac{1}{1 + e^{\frac{E_c - k_B T - E_c}{k_B T}}} = \frac{1}{1 + e^{-1}} \approx 1 - e^{-1} \approx 0,7 //$$

$$d) \mu = E_v ; E = E_v - k_B T \quad \text{você} \Rightarrow 1 - P(E = E_v - k_B T)$$

kenn

$$P = 1 - \frac{1}{1 + e^{\frac{E_v - k_B T - E_v}{k_B T}}} = 1 - \frac{1}{1 + e^{-1}} \approx 0,39$$