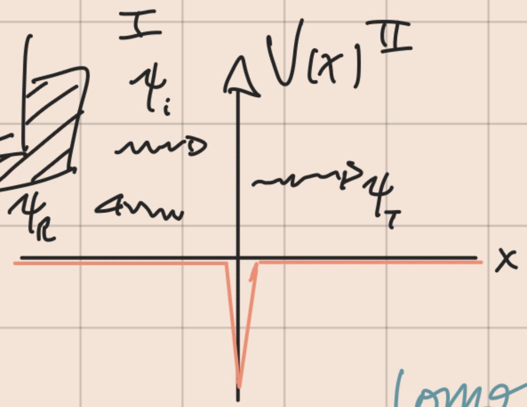
Lucas González **Auxiliar #2** 29/8/22

P1



a) $\psi_i = A e^{ikx}$ $E>0$

$\psi_T = B e^{ikx}$

$\psi_R = C e^{-ikx}$ sentido opuesto...

Como en las 2 zonas estamos al mismo potencial entonces $k_I = k_{II}$ (potencial nulo).

así, las funciones de onda son:

$$\psi_I(x) = Ae^{ikx} + Ce^{-ikx} \longrightarrow \psi_I'(x) = ikAe^{ikx} - ikCe^{-ikx}$$

$$\psi_{II}(x) = Be^{ikx} \longrightarrow \psi_I'(x) = ikBe^{ikx}$$

La función de onda debe ser continua, además no podemos asumir que es C1 porque la diferencia de potencial debe ser finita:

$\boxed{\text{C.B.}}$ (1) $\psi_I(0) = \psi_{II}(0)$ (2) $\psi'' + \frac{2m}{\hbar}(E + \Omega\,\delta(x))\psi = 0$

de (1) obtenemos que $A + C = B$, para la ec (2) integramos entre $-\varepsilon$ y ε alrededor de la delta $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx \Rightarrow \left[\psi_{II}'(0) - \psi_I'(0)\right] + \frac{2m\Omega}{\hbar^2}\psi(0) = 0$

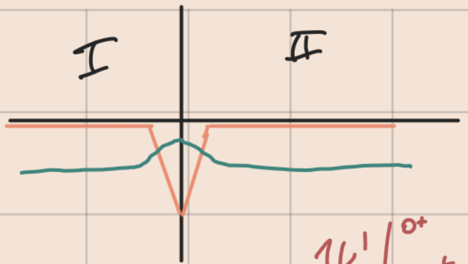
$$\Rightarrow ikB - ikA + ikC + \frac{2m\Omega}{\hbar^2}B = 0 \rightarrow \left(\frac{2m\Omega}{\hbar^2} + ik\right)B - ik(A - C) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2m\Omega}{ik\hbar^2} + 1\right)B = (A - C) \overset{(1)}{=} 2A - B \Rightarrow \left(-\frac{i\cancel{2}m\Omega}{k\hbar^2} + \cancel{2}\right)B = \cancel{2}A \Rightarrow \left(\frac{-im\Omega + k\hbar^2}{k\hbar^2}\right)B = A$$

$$\rightarrow \frac{B}{A} = \frac{k\hbar^2}{k\hbar^2 - im\Omega} \Rightarrow T = \frac{|B|^2}{|A|^2}\cdot\frac{k_I}{k_{II}} = \frac{k^2\hbar^4}{k^2\hbar^4 + m^2\Omega^2}$$

b) sabemos que: $\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\psi = 0$, $E < 0$ → para que esté ligado.

$\psi_I = Ae^{kx}$; $\psi_{II} = Be^{-kx}$ → las funciones no pueden explotar ya que $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2 dx = 1$



$\psi_I' = Ake^{kx}$; $\psi_{II}' = -Bke^{-kx}$ reemplazando en schr.:

$$\psi'' + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi + \frac{2m\Omega}{\hbar^2}\delta(x)\psi = 0 \quad \Big/ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx \,,\ \lim_{\varepsilon \to 0}$$

$$\psi'\Big|_{0^-}^{0^+} + \frac{2m\Omega}{\hbar^2}\int_{0^-}^{0^+}\delta(x)\psi(x)\,dx = 0 \qquad \text{C.B. } \psi_I(0) = \psi_{II}(0) \Rightarrow A = B$$

$$\psi_{II}'(0) - \psi_I'(0) + \frac{2m\Omega}{\hbar^2}\psi(0) = 0 \Rightarrow -2kA + \frac{2m\Omega}{\hbar^2}A = 0 \Rightarrow \boxed{k = \frac{m\Omega}{\hbar^2}}$$

tenemos solo 1 nivel de energía.

y además $k^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2} \Leftrightarrow \frac{m^2\Omega^2}{\hbar^4} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow \boxed{E = -\frac{m\Omega^2}{\hbar^2}}$

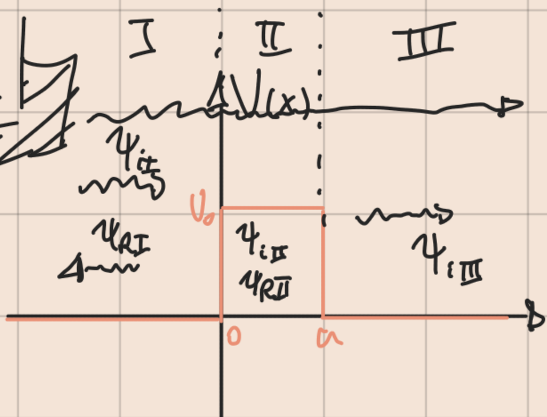
<u>Normalizando</u>: $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2dx = 1 \Rightarrow 2\int_0^{\infty}|A|^2e^{-2kx}dx = 1$

$$2|A|^2\int_0^{\infty}e^{-2kx}dx = 1 \Rightarrow \frac{|A|^2}{k} = 1 \Rightarrow A = \pm\sqrt{k} = \pm\sqrt{\frac{m\Omega}{\hbar^2}}$$

$$\psi_0(x) = \sqrt{\frac{m\Omega}{\hbar^2}}\, e^{-\frac{m\Omega}{\hbar^2}|x|}$$

e) Si $|E_0| = 5\,meV \Rightarrow \hbar = 10^{-34}$; $m_e = 9\cdot 10^{-31}kg$; $1eV = 1{,}6\cdot 10^{-19}J \Rightarrow \Omega \approx 25\cdot 10^{-10}eV$

P2



$$\text{I} \mid \psi_{iI} = Ae^{ik_Ix} \ ; \ \psi_{RI} = Be^{-ik_Ix} \to \psi_I$$

$$\text{II} \mid \psi_{iII} = Ce^{ik_{II}x} \ ; \ \psi_{RII} = De^{-ik_{II}x} \to \psi_{II}$$

$$\text{III} \mid \psi_{iIII} = Ee^{ik_{III}x} \to \psi_{III}$$

sabemos que $k_{III} = k_I$ porque es el mismo potencial.

Ahora las funciones son continuas y las derivadas también porque la diferencia de potencial es finita. C.B. $\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \longrightarrow A + B = C + D$ (1)

$\psi_I'(0) = \psi_{II}'(0) \to ik_I(A - B) = ik_{II}(C - D)$ (2)

$\psi_{II}(a) = \psi_{III}(a) \longrightarrow Ce^{ik_{II}a} + De^{-ik_{II}a} = Ee^{ik_Ia}$ (3)

$\psi_{II}'(a) = \psi_{III}'(a) \to ik_{II}(Ce^{ik_{II}a} - De^{-ik_{II}a}) = ik_IEe^{ik_Ia}$ (4)

Queda despejar las incognitas, da igual como resuelvan esta parte. Una forma es lo siguiente

$(1)\cdot ik_I + (2) \Rightarrow 2ik_IA = Ci(k_I + k_{II}) + Di(k_I - k_{II})$ (5)

de (3) obtenemos que $C = Ee^{ia(k_I - k_{II})} - De^{-2ik_{II}a}$ (6)

reemplazamos en (4): $ik_{II}[Ee^{ik_I a} - De^{-ik_{II}a} - De^{-ik_{II}a}] = ik_I E e^{ik_I a}$

$$Ee^{ik_I a}(ik_{II} - ik_I) = 2Dik_{II}e^{-ik_{II}a} \Rightarrow D = \frac{Ee^{ia(k_I+k_{II})}\, i(k_{II}-k_I)}{2ik_{II}}$$

reemplazo en (6): $C = Ee^{ia(k_I-k_{II})} - i(k_{II}-k_I)Ee^{ia(k_I-k_{II})}\cdot\frac{1}{2ik_{II}} = Ee^{ia(k_I-k_{II})}\left(1-\frac{k_{II}-k_I}{2k_{II}}\right)$

$$C = \frac{(k_{II}+k_I)}{2k_{II}}Ee^{ia(k_I-k_{II})}$$

poniendo todo en (5) obtenemos que: $2k_I A = \frac{(k_I+k_{II})^2}{2k_{II}}Ee^{ia(k_I-k_{II})} - \frac{(k_I-k_{II})^2}{2k_{II}}\cdot Ee^{ia(k_I+k_{II})}$ $/\frac{1}{2k_I}$

$$A = \frac{Ee^{iak_I}}{4k_Ik_{II}}\left[(k_I+k_{II})^2e^{-iak_{II}} - (k_I-k_{II})^2e^{iak_{II}}\right] \quad /\,|\ |^2$$

$$|A|^2 = \frac{|E|^2}{16k_I^2k_{II}^2}\left|\cos(ak_{II})[(k_I+k_{II})][(k_I+k_{II})^2-(k_I-k_{II})^2] - i\sin(ak_{II})[(k_I+k_{II})^2+(k_I-k_{II})^2]\right|^2$$

$$|A|^2 = \frac{|E|^2}{16k_I^2k_{II}^2}\left[\cos^2(ak_{II})\cdot(4k_Ik_{II})^2 + 4\sin(ak_{II})(k_I^2+k_{II}^2)^2\right]$$

$$\Rightarrow T = \frac{|E|^2}{|A|^2} = \frac{4k_I^2k_{II}^2}{16k_I^2k_{II}^2 + (k_I^2-k_{II}^2)\sin^2(ak_{II})} < 1$$

o sea que apesar de que E>V no es totalmente seguro de que exista transmisión.

P3

esto tiene mala pinta...

<u>caso par</u>

Ocupamos de $0<x<a$ con $\psi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx)$ con $k = \sqrt{2mE}/\hbar$

Una solución par es tal que: $\psi(x) = \psi(-x) = A\sin(kx) + B\cos(kx)$

$$\Rightarrow \psi(x) = \begin{cases} -A\sin(kx) + B\cos(kx) & -a<x<0 \\ A\sin(kx) + B\cos(kx) & 0<x<a \end{cases}$$

imponemos continuidad en $x=0 \Rightarrow B=B$ ... ¿Qué pasa con la derivada?

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \ /\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{d^2\psi}{dx^2}dx = E\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\psi(x)dx \ /\lim_{\varepsilon\to 0}$$

$$\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{\varepsilon} - \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{-\varepsilon} = \frac{2m}{\hbar^2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}V(x)\psi(x)dx \Leftrightarrow \left.\frac{d\psi}{dt}\right|_{0^+} - \left.\frac{d\psi}{dt}\right|_{0^-} = \frac{2m}{\hbar^2}\int_{0^-}^{0^+}\psi(x)\alpha\,\delta(x)dx$$

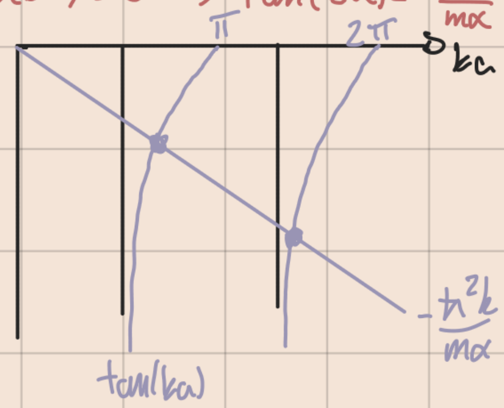
$$Ak - (-Ak) = \frac{2m}{\hbar^2}\alpha\psi(0) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}B \Rightarrow B = \frac{\hbar^2 kA}{m\alpha}$$

Luego: $\psi(x) = A\left(\sin(kx) + \frac{\hbar^2 k}{m\alpha}\cos(kx)\right)$ $\quad 0 \le x \le a$ con $\psi(-x) = \psi(x)$

para determinar la energía, usamos que $\psi(x=a)=0$

$$A\sin(ka) + \frac{A\hbar^2 k}{m\alpha}\cos(ka) = 0 \Rightarrow \tan(ka) = -\frac{\hbar^2 k}{m\alpha}$$

La solución gráfica tiene la pinta



$$E_n \geq \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2m(2a)^2}$$

cuando $\alpha \to 0$, tenemos una línea recta vertical y nos va a $\tan(ka) = -\infty \Rightarrow ka = \frac{n\pi}{2}$ // pozo infinito

cuando $\alpha \to +\infty$ la línea se pone horizontal $\to n\pi \Rightarrow E_n = \frac{n^2\hbar^2\pi}{2ma^2}$ // pozo infinito de ancho a

caso impar $\psi(x) = -\psi(-x) = A\sin(kx) - B\cos(kx)$ $\quad (-a \le x \le 0)$

aplicamos el mismo razonamiento, solo que ahora es $B=0$ $\quad \psi(a) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow A\sin(ka) = 0 \Rightarrow ka = \frac{n\pi}{2}$

$$\Rightarrow \psi(x) = A\sin(kx) \quad (-a \le x \le a) \quad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m(2a)^2} \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

solución exacta del pozo de ancho $2a$ $\Rightarrow$ la delta es invisible a los impares...