

* La palabra volumen es general $\rightarrow$ Volumen 1D = Largo
 Volumen 2D = Área
 Volumen 3D = Volumen

P1 Para calcular la E_F debemos obtener los estados posibles y llenarlos con los N electrones disponibles

1D:

Volumen unidimensional $\rightarrow$ Partícula Atrapada entre 0 y V

$$\rightarrow E_{mx} \psi_{mx} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_{mx}}{dx^2}$$

$$\Rightarrow \psi_{mx}(x) = A \sin\left(\frac{m_x \pi}{V} x\right) \Rightarrow E_{mx} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{m_x \pi}{V}\right)^2$$

Debido a la degeneración electrónica, cada nivel E_{mx} admite dos electrones $\Rightarrow$ Al llenar los niveles, el último nivel llenado es $E_{m_F} \rightarrow m_F = N/2$

$$\Rightarrow E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{N\pi}{2V}\right)^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{m_F \pi}{2}\right)^2$$

2D:

Volumen bidimensional $\rightarrow$ Partícula Atrapada en x entre 0 y L
 Partícula Atrapada en y entre 0 y L

$$\hookrightarrow L \cdot L = V$$

$$\rightarrow E_{mxmy} \psi_{mxmy} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi_{mxmy}$$

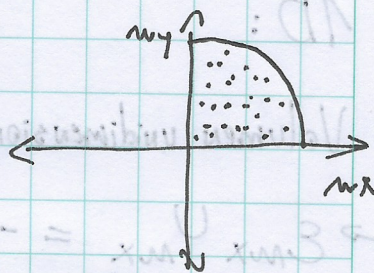
Debido a la condición periódica $\psi(x+L, y) = \psi(x, y)$

$$\Rightarrow \psi_{mxmy}(x, y) = A \sin\left(\frac{2\pi m_x}{L} x\right) \sin\left(\frac{2\pi m_y}{L} y\right)$$

$$\Rightarrow \epsilon_{m_x m_y} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\left[\frac{2\pi m_x}{L} \right]^2 + \left[\frac{2\pi m_y}{L} \right]^2 \right)$$

¿Cómo llenamos los estados?

Observando el espacio de fase $\{m_x, m_y\}$ y Asumiendo N suficientemente grande podemos llenar los estados tal que se forma un cuarto de círculo ($m_x, m_y > 0$)



Nombramos $\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(m_x, m_y) \Rightarrow \epsilon_k = \frac{\hbar^2}{2m} |\vec{k}|^2$

$\Rightarrow$ Los estados se llenaran hasta un radio $|\vec{k}_F|$ tal que:

$\frac{\pi |\vec{k}_F|^2}{4}$ es el volumen que ocupan los estados hasta ϵ_F

Notando que $\frac{|\vec{k}|^2}{(2\pi/L)^2} = m_x^2 + m_y^2$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{\pi |\vec{k}_F|^2}{4} \right)}{(2\pi/L)^2} = \frac{N}{2} \Rightarrow |\vec{k}_F|^2 = \frac{8\pi N}{L^2} = \frac{8\pi N}{V} = 8\pi n$$

$$\Rightarrow \epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot 8\pi n = \frac{4\pi\hbar^2}{m} n$$

3D

Análogamente a 2D tenemos que: $\rightarrow L \cdot L \cdot L = V$

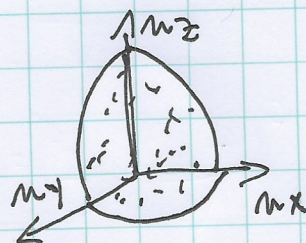
$$\psi_{m_x m_y m_z}(x, y, z) = A \sin\left(\frac{2\pi m_x}{L} x\right) \sin\left(\frac{2\pi m_y}{L} y\right) \sin\left(\frac{2\pi m_z}{L} z\right)$$

$$\Rightarrow \epsilon_{m_x m_y m_z} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\left[\frac{2\pi m_x}{L} \right]^2 + \left[\frac{2\pi m_y}{L} \right]^2 + \left[\frac{2\pi m_z}{L} \right]^2 \right)$$

¿Cómo llenamos los estados?

Ahora el espacio de fase es $\{m_x, m_y, m_z\}$

$\Rightarrow$ Debemos llenar $1/8$ de esfera:



$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L} (m_x, m_y, m_z) \Rightarrow \epsilon_k = \frac{\hbar^2 |\vec{k}|^2}{2m}$$

$\rightarrow \left(\frac{4\pi |\vec{k}_F|^3}{3} \right) / 8$ es el volumen que ocupan los estados hasta ϵ_F

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{4\pi |\vec{k}_F|^3}{3} \right)}{8 (2\pi/L)^3} = \frac{N}{2} \Rightarrow |\vec{k}_F|^3 = 24\pi^2 n$$

$$\Rightarrow \epsilon_F = \frac{12 \hbar^2 \pi^2 n}{m}$$