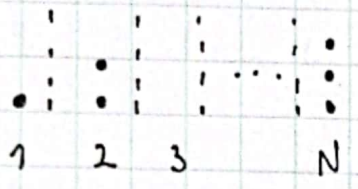


P1) a. Consideramos a cada partícula como un pozo que puede contener n cuantos de energía


 Sumando todos los cuantos obtenemos un total de q cuantos de energía, separados por $N-1$ barreras (las $|$).

Así, podemos ordenar el total de cuantos q de Ω formas:

$$\Omega = \binom{q+N-1}{N-1} = \frac{(q+N-1)!}{q!(N-1)!}$$

La energía total E es:

$$E = \hbar\omega \frac{N}{2} + q\hbar\omega \Rightarrow q = \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{N}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{S}{k_B} = \ln(\Omega) = \ln\left(\frac{(q+N-1)!}{q!(N-1)!}\right) \approx \ln\left(\frac{(q+N)!}{q!N!}\right)$$

Usando Stirling:

$$\frac{S}{k_B} \approx (q+N)\ln(q+N) - N\ln(N) - q\ln(q)$$

$$= \left(\frac{E}{\hbar\omega} + \frac{N}{2}\right)\ln\left(\frac{E}{\hbar\omega} + \frac{N}{2}\right) - \left(\frac{E}{\hbar\omega} - \frac{N}{2}\right)\ln\left(\frac{E}{\hbar\omega} - \frac{N}{2}\right) - N\ln(N)$$

$$b. \frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = k_B \left[\frac{1}{\hbar\omega} \ln \left(\frac{E}{\hbar\omega} + \frac{N}{2} \right) + 1 - \frac{1}{\hbar\omega} \ln \left(\frac{E}{\hbar\omega} - \frac{N}{2} \right) - 1 \right]$$

$$= \frac{k_B}{\hbar\omega} \ln \left(\frac{\frac{E}{\hbar\omega} + \frac{N}{2}}{\frac{E}{\hbar\omega} - \frac{N}{2}} \right) \quad \vdots \quad \vdots$$

$$= \frac{k_B}{\hbar\omega} \ln \left(\frac{1 + \frac{\hbar\omega N}{2E}}{1 - \frac{\hbar\omega N}{2E}} \right)$$

$$c. \quad \exp(1) \Leftrightarrow e^{\beta\hbar\omega} = \frac{(1 + \hbar\omega N / 2E)}{(1 - \hbar\omega N / 2E)}$$

$$\Leftrightarrow e^{\beta\hbar\omega} = 1 + \frac{\hbar\omega N}{2E} (1 + e^{\beta\hbar\omega})$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{\hbar\omega N}{2} \left(\frac{1 + e^{\beta\hbar\omega}}{-1 + e^{\beta\hbar\omega}} \right)$$

$$\rightarrow C_V = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{\hbar\omega N}{2} \left[\frac{\left(\frac{-\hbar\omega}{k_B T^2} \right) e^{\beta\hbar\omega}}{-1 + e^{\beta\hbar\omega}} - \frac{\left(\frac{-\hbar\omega}{k_B T^2} \right) (1 + e^{\beta\hbar\omega}) e^{\beta\hbar\omega}}{(1 + e^{\beta\hbar\omega})^2} \right]$$

$$= \frac{\hbar^2 \omega^2 N}{2 k_B T^2} \left[\frac{e^{\beta\hbar\omega} (1 - e^{\beta\hbar\omega}) + e^{\beta\hbar\omega} (1 + e^{\beta\hbar\omega})}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^2} \right]$$

$$= \frac{\hbar^2 \omega^2 N}{k_B T^2} \cdot \frac{e^{\beta\hbar\omega}}{(e^{\beta\hbar\omega} - 1)^2}$$



Para $k_B T \gg \hbar \omega$ se recupera el límite termodinámico:

$$C_V \rightarrow N k_B$$

Para $k_B T \ll \hbar \omega$ se obtiene que $C_V \rightarrow 0$:

$\Rightarrow$ ¡El modelo falla para $k_B T \ll \hbar \omega$!

P2

$$\rho = \frac{1}{8} \mathbb{I} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|) (|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|)$$

$$= \frac{1}{8} \mathbb{I} + \frac{1}{4} (|1\rangle\langle 2| |1\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 2| |2\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 1| |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| |2\rangle\langle 1|)$$

$$= \frac{\mathbb{I}}{8} + \frac{1}{4} (|1\rangle\langle 1| \otimes |2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 2| \otimes |2\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 2| \otimes |1\rangle\langle 1|)$$

a. Recordando que $\frac{S}{k_B} = -\text{tr}[\rho \ln(\rho)] = -\sum_j \lambda_j \ln(\lambda_j)$

donde λ_j son los Autovalores de ρ , buscamos ρ como matriz:

$$\underbrace{|1\rangle\langle 1|}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \otimes \underbrace{|2\rangle\langle 2|}_{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|2\rangle\langle 2| \otimes |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PROARTE

$$\underbrace{|1\rangle\langle 2|}_{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \otimes \underbrace{|2\rangle\langle 1|}_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|2\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 2| = \begin{pmatrix} 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \rho = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/8 & -1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 & 3/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix} \quad \text{Usando una calculadora de autovalores obtenemos:}$$

$$\lambda_1 = 5/8; \lambda_{2,3,4} = 1/8$$

$$\Rightarrow \frac{S(\rho)}{k_B} = -\frac{5}{8} \ln\left(\frac{5}{8}\right) - 3 \cdot \frac{1}{8} \ln\left(\frac{1}{8}\right) \approx 1,07354$$