Tarea 4

Fecha de entrega: 25 de Septiembre

Profesor: Felipe Barra De La Guarda
Auxiliar: Matías Araya Satriani
Ayudantes: Astor Sandoval Parra

Considere lo siguiente al momento de desarrollar su tarea:

Considerando consideramos un hamiltoniano general:

$$H(\{\vec{p}_i\}, \{\vec{x}_i\}) = \sum_i^N \frac{|\vec{p}_i^2|}{2m} + V(\{\vec{x}_i\})$$

Si se considera un sistema clásico la función partición se calculará integrando el factor de boltzmann en todo el espacio de fase (de tamaño $2n$ donde n denota el tamaño de la dimensión de $\vec{p}$ y $\vec{x}$, ej: para 3D $\to$ 6), dividiendo por el factorial del tamaño del ensemble N:

$$Z = \frac{1}{h^{nN} N!} \int d^n\vec{p}_1 \cdots d^n\vec{p}_N \int d^n\vec{x}_1 \cdots d^n\vec{x}_N e^{-\beta H(\{\vec{p}_i\},\{\vec{x}_i\})}$$

Donde $\beta = 1/k_bT$ y h es la constante de Planck.
Para el caso cuántico la función partición es la suma de los factores de boltzmann de las autoenergías E_i del Hamiltoniano H (considerando la degeneración g_i), dividido por el factorial del tamaño del ensemble N:

$$Z = \frac{1}{N!} \sum g_i e^{-\beta E_i}$$

P1. Teorema de equipartición

1. Para un sistema clásico, cuyo Hamiltoniano es de la forma $\mathcal{H}(q_1, q_2, \cdots, p_1, p_2, \cdots)$, demuestre el **Teorema de Equipartición**:

$$\left\langle \nu_i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu_j} \right\rangle = T\delta_{ij} \tag{1}$$

   donde $\nu_1 = q_1$, $\nu_2 = q_2, \cdots$, $\nu_{N+1} = p_1$, $\nu_2 = p_2, \cdots$. También, $\langle \cdot \rangle$ indica el promedio en el ensemble canónico

2. Utilize el resultado anterior para calcular la capacidad calórica de un cristal descrito por el Hamiltoniano:

$$\mathcal{H}(q_1, q_2, \cdots, p_1, p_2, \cdots) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{|\vec{p_i}|^2}{2m_i} + \frac{m_i \omega_i^2 q_i^2}{2} \right) \tag{2}$$

Este resultado se conoce como la regla de Dulong-Petit.

3. Comente sobre las implicancias del Teorema de Equipartición en un gas ideal.

P2. Osciladores

Considere un oscilador 1D de masa m y frecuencia ω bajo un baño térmico T. Usando el ensemble canónico:

1. Encuentre la energía promedio del oscilador para el caso clásico.
2. Encuentre la energía promedio del oscilador para el caso cuántico.
3. Muestre que son iguales en el límite apropiado.

P3. Ley de Curie

Considere el Hamiltoniano de un paramagneto bajo un campo magnético externo:

$$\mathcal{H} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \tag{3}$$

con $|\vec{\mu}| = \mu$ constante. Si tenemos N paramagnetos independientes, demuestre la ley de Curie: **A temperaturas altas, la magnetización del sistema es directamente proporcional al campo magnético externo**, para los siguientes casos:

1. El caso donde $\vec{\mu}$ es el momento magnético clásico.
2. El caso donde $\vec{\mu} = \pm\mu\hat{z}$, es decir, el momento magnético cuántico de una partícula de spin 1/2.

Comente sobre los resultados obtenidos.
Indicación: La magnetización tiene la forma $M = N(\langle\mu_x\rangle + \langle\mu_y\rangle + \langle\mu_z\rangle)$
Hint: El campo $\vec{B}$ es arbitrario, por lo tanto uno puede elegir una dirección conveniente, como por ejemplo $\vec{B} = B\hat{z}$.